



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

**Juha Ala-Luhtala**

**Teräksen tilastollinen väsymisanalyysi**

Diplomityö

Tarkastajat: Professori Keijo Ruohonen  
ja Dosentti Esko Turunen  
Tarkastaja ja aihe hyväksytty  
Tieto- ja sähkötekniikan tiedekunnan  
osastoneuvoston kokouksessa  
kokouksessa 09.02.2011

# TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Tietotekniikan koulutusohjelma

**Juha Ala-Luhtala: Teräksen tilastollinen väsymisanalyysi**

Diplomityö, 63 sivua, 2 liitesivua

Helmikuu 2011

Pääaine: Teknillinen matematiikka

Tarkastajat: professori Keijo Ruohonen, dosentti Esko Turunen

Avainsanat: sulkeumat teräksessä, ääriarvoanalyysi, teräksen väsyminen

Teräksessä esiintyvillä suurilla sulkeumilla on havaittu olevan merkittävä vaikutus teräksen väsymisominaisuuksiin. Työn tarkoituksena on selvittää väsymismurtuman aiheuttaneiden sulkeumien koon tilastollinen jakauma ja tutkia sulkeumien vaikutusta teräksen väsymiseen. Lisäksi tarkastellaan miten teräksestä leikatuilta hiepinnoilta määritetyn sulkeuma-aineiston avulla voitaisiin ennustaa väsymismurtuman aiheuttaneiden sulkeumien kokojakaumaa. Työ on tehty Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitoksella osana Tekes-projektia Clean Steels and Fatigue Survival with Material Imperfections.

Suurimpien sulkeumien kokojakaumalle voidaan ääriarvoteoriaa käyttäen johtaa kolme mahdollista jakaumatyyppiä. Eri jakaumatyypit voidaan yhdistää yhdeksi jakaumaksi, jota kutsutaan yleiseksi ääriarvojakaumaksi. Jakaumien parametrit on estimoitu pääasiassa käyttäen suurimman uskottavuuden menetelmää. Lisäksi tarkastellaan suppeammin kolmea muuta ääriarvojakaumien yhteydessä käytettyä estimointimenetelmää. Jakaumien sopivuuden arviointiin käytetään erityisesti maksimiarvojakaumille sopivaa graafista menetelmää sekä Kolmogorov-Smirnovin yhden otoksen testiä. Sulkeumien yhteyttä väsymiseen tarkasteltiin käyttäen Murakami-Endo mallia.

Aineistona työssä on kolmen eri teräslaadun väsytyскоetulokset ja hiepinta-aineistot. Pääasiallisena aineistona käytetään kahden eri laakeriteräksen aineistoja. Kolmannelle teräslaadulle tutkittiin vain murtuman aiheuttaneiden sulkeumien kokojen ennustamista hiepinta-aineiston avulla. Väsymismurtuman aiheuttaneiden sulkeumien kokojen havaittiin noudattavan hyvin maksimiarvojakaumia. Valintaa eri maksimiarvojakaumien välillä on kuitenkin usein vaikea tehdä käyttäen pelkästään työssä kuvattuja menetelmiä. Tutkimuksissa havaittiin, että hiepinta-aineiston perusteella on vaikea ennustaa murtuman aiheuttaneiden sulkeumien tarkkaa kokojakaumaa. Osasyynä tähän on hiepinnan hyvin pieni pinta-ala suhteessa väsytyскоeissa käytetyn testisauvan tilavuuteen, jolloin epävarmuus ennustuksessa kasvaa suureksi. Murakami-Endo mallilla on mahdollista arvioida teräksen väsymisrajan alarajaa sulkeumakokojen avulla. Mallin hyvyys riippui kuitenkin työssä käytetylle aineistolle merkittävästi väsytyскоeissa käytetystä väsytyssuhteesta.

## ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Master's Degree Programme in Information Technology

**Juha Ala-Luhtala : Statistical fatigue analysis of steel**

Master of Science Thesis, 63 pages, 2 Appendix pages

February 2011

Major: Technical mathematics

Examiners: professor Keijo Ruohonen, docent Esko Turunen

Keywords: inclusions in steel, extreme value analysis, fatigue

Large inclusions and defects have a major effect to the fatigue properties of steel. The purpose of this work is to determine the statistical distribution of fatigue initiating inclusions and to study the effect of inclusions to the fatigue limit of steel. It is also studied how the sizes of inclusions found from fracture surface could be predicted using inclusion size data from two dimensional microsections cut from the steel. This work has been done at the Department of Mathematics in Tampere University of Technology and it is a part of a larger Tekes-project called Clean Steels and Fatigue Survival with Material Imperfections.

The size distribution of the largest inclusions is modeled using statistics of extremes. There are three possible limit distributions for the maximum of a sequence of random variables. The three distribution types can be combined into a single type called the Generalized Extreme Value Distribution. The distribution parameters are estimated mainly using the Method of Maximum Likelihood but also three other estimation methods are studied. The goodness of fit is inspected using a graphical method suited especially for extreme value distributions and also using the Kolmogorov-Smirnov one sample test. The effect of inclusion sizes to fatigue is investigated using Murakami-Endo model.

The data used in this work are the fatigue test results and microsection data for three different steels. It was found out that the sizes of the fatigue initiating inclusions fit well to extreme value distributions. Often multiple extreme value distributions fit well to the data and the choice between different distributions is hard to make using the methods described in this work. It was also found out that it is hard to predict the size distribution of fatigue initiating inclusions using just the microsection data of inclusion sizes. One reason is the small area of microsections compared to the volume of test-rod. It is possible to estimate the lower bound of fatigue limit using Murakami-Endo model. In this work it was found out that the quality of the estimate depended on the stress ratio.

## ALKUSANAT

Tämä työ on tehty Tampereen teknillisen yliopiston matematiikan laitoksella osana Tekes-projektia Clean steels and fatigue survival with material imperfections (FATE-DEFEX). Työn tarkoituksena oli tutkia teräksestä löytyvien sulkeumien tilastollisia jakaumia, sekä niiden yhteyttä teräksen väsymiseen. Työ antoi mielenkiintoisen ja haastavan mahdollisuuden toimia osana monialaista tutkimusryhmää. Haluan kiittää työni ohjaajaa ja tarkastajaa professori Keijo Ruohosta mielenkiintoisesta aiheesta, sekä ohjauksesta ja neuvoista työn tekemisen aikana. Kiitokset lisäksi kaikille projektissa mukana olleille osapuolille.

Tampere, 31.3.2011

Juha Ala-Luhtala

# SISÄLLYS

1. Johdanto . . . . .	1
2. Todennäköisyysteoriaa . . . . .	3
2.1 Satunnaismuuttujat . . . . .	3
2.2 Satunnaisvektorit . . . . .	5
2.3 Jakaumia . . . . .	7
2.4 Raja-arvolauseita . . . . .	8
3. Estimointi ja hypoteesin testaus . . . . .	11
3.1 Satunnaisotos . . . . .	11
3.2 Piste-estimointi . . . . .	12
3.3 Estimointimenetelmiä . . . . .	14
3.3.1 Momenttimenetelmä . . . . .	14
3.3.2 Suurimman uskottavuuden menetelmä . . . . .	15
3.4 Hypoteesin testaus . . . . .	17
3.4.1 Kolmogorov-Smirnov testi . . . . .	18
4. Ääriarvoteoriaa . . . . .	21
4.1 Maksimiarvojakaumat . . . . .	21
4.2 Parametrien estimointi . . . . .	26
4.2.1 Momenttimenetelmä . . . . .	27
4.2.2 Todennäköisyyksillä painotettujen momenttien menetelmä . . . . .	28
4.2.3 Pienimmän neliösumman menetelmä . . . . .	30
4.2.4 Suurimman uskottavuuden menetelmä . . . . .	31
5. Sovelluksia teräksen väsymisanalyysiin . . . . .	35
6. Aineiston käsittely . . . . .	40
6.1 Väsytykokeet . . . . .	40
6.2 Maksimiarvojakaumien graafinen esittäminen . . . . .	41
6.3 Hiepinnan ja murtopinnan sulkeumien vertailu . . . . .	42
6.4 Murakami-Endo malli . . . . .	43
7. Tulokset . . . . .	45
7.1 Väsytykokeet . . . . .	45
7.1.1 Laakeriteräs B . . . . .	45
7.1.2 Laakeriteräs S . . . . .	48
7.2 Hiepinnan ja murtopinnan sulkeumien vertailua . . . . .	50
7.2.1 Laakeriteräs B . . . . .	50
7.2.2 Laakeriteräs S . . . . .	52
7.2.3 Teräs A . . . . .	55
7.3 Murakami-Endo mallin soveltaminen . . . . .	57
8. Yhteenveto . . . . .	59

Lähteet . . . . .	61
A.Liitteitä . . . . .	64
A.1 Väsytyiskoetulokset laakeriteräs S:lle . . . . .	64
A.2 Väsytyiskoetulokset laakeriteräs B:lle . . . . .	65

## TERMIT JA SYMBOLIT

$\Omega$	Otosavaruus
$P(A)$	Tapahtuman $A$ todennäköisyys
$X, Y, Z$	Satunnaismuuttuja
$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$	Satunnaisvektori
$E(\cdot)$	Odotusarvo
$\text{Var}(\cdot)$	Varianssi
$\text{Cov}(\cdot, \cdot)$	Kovarianssi
$f(\cdot   \theta_1, \dots, \theta_p)$	Tiheysfunktio, joka riippuu parametreista $\theta_1, \dots, \theta_p$
$F(\cdot   \theta_1, \dots, \theta_p)$	Kertymäfunktio, joka riippuu parametreista $\theta_1, \dots, \theta_p$
$N(\mu, \sigma^2)$	Normaalijakauma odotusarvolla $\mu$ ja varianssilla $\sigma^2$
$N_p(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$	p-ulotteinen normaalijakauma odotusarvolla $\boldsymbol{\mu}$ ja varianssimatriisilla $\Sigma$
$\chi^2(v)$	$\chi^2$ -jakauma $v$ vapausasteella
$X_n \xrightarrow{D} X$	Satunnaismuuttujien jono $\{X_n\}$ suppenee jakaumaltaan kohti satunnaismuuttujaa $X$
$\nabla f$	Funktion $f$ gradientti
$\bar{X}_n$	Otoskeskiarvo
$S_n^2$	Otosvarianssi
$l(\cdot,   x_1, \dots, x_n)$	Loguskottavuusfunktio, joka perustuu otokseen $x_1, \dots, x_n$

# 1. JOHDANTO

Teräksen väsymisellä tarkoitetaan teräskappaleen hajoamista pitkään kestäväen syklisen kuormituksen johdosta. Teräkseen jää valmistuksessa mikroskooppisia epäpuhtauksia, jotka sisältävät metallisen komponentin lisäksi kevyempiä alkuaineita kuten happea tai typpeä. Näitä epäpuhtauksia sanotaan sulkeumiksi, ja on havaittu, että ne vaikuttavat merkittävästi teräksen väsymisominaisuuksiin [20]. Näin ollen teräksestä löytyvien suurimpien sulkeumien tilastollisella jakaumalla on suora yhteys teräskomponentin laatuun.

Sulkeumien vaikutusta teräksen väsymiseen voidaan tutkia suorittamalla väsytykokeita teräksestä leikatulle testisauvalle. Väsytykskoeksessa testisauvaa väsytetään vakioamplitudisella jännityksellä kunnes se hajoaa, tai saavutetaan ennalta määritetty maksimimäärä syklejä. Hajonneesta testisauvasta voidaan paikantaa väsymismurtuman aiheuttanut sulkeuma. Toinen tapa määrittää sulkeumien kokoja on käyttää teräksestä leikattuja kiillotettuja hiepintoja, joilta voidaan määrittää pinnan leikkaavien sulkeumien projektiopinta-ala. Teräksestä löytyvien sulkeumien jakaumia on tutkittu esimerkiksi lähteissä [12, 28, 1, 5]. Eräs mahdollinen tapa sulkeumien koon määrittämiseen on myös ultraäänimittaus [15].

Tämä työ on tehty osana Tekesin Clean steels and fatigue survival with material imperfections (FATE-DEFEX) projektia. Työssä tarkastellaan teräksestä löytyvien suurimpien sulkeumien tilastollista jakaumaa ja sulkeumien koon yhteyttä teräksen väsymiseen. Lisäksi tarkastellaan miten hiepinnaalta löytyneiden sulkeumien kokojen avulla voitaisiin ennustaa suurimpien sulkeumien kokoja suuremmassa tilavuudessa, kuten testisauvassa.

Työssä käytetyt menetelmät perustuvat vahvasti todennäköisyysteoriaan, joten kappaleessa 2 kerrataan lyhyesti työn kannalta tärkeimpiä todennäköisyysteorian käsitteitä ja tuloksia. Kappaleessa 3 tarkastellaan estimointia ja hypoteesin testausta. Tässä kappaleessa esitellään työssä käytetyt estimointimenetelmät ja Kolmogorov-Smirnovin testi jakauman sopivuuden testaamiseen. Kappale 4 käsittelee ääriarvosteoriaa. Erityisesti tarkastellaan satunnaismuuttujien joukon maksimin tilastollista jakaumaa. Tiettyjen ehtojen vallitessa maksimin jakauman voidaan osoittaa olevan jotain kolmesta eri tyypistä. Nämä tyypit ovat Gumbelin jakauma (Tyyppi I), Fréchet'n jakauma (Tyyppi II) ja Weibullin ääriarvojakauma (Tyyppi III). Eri tyypin jakaumat voidaan myös yhdistää yhdeksi jakaumaksi, jota sanotaan yleiseksi ää-



riarvojakaumaksi. Kappaleessa 5 esitellään ääriarvoanalyysin sovelluksia teräksen väsymisanalyysiin. Kappaleessa 6 esitellään työssä käytetty aineisto ja sen analysointiin käytetyt menetelmät. Kappaleessa 7 on esitetty saadut tulokset. Lopuksi kappaleessa 8 annetaan yhteenveto saaduista tuloksista.

## 2. TODENNÄKÖISYYSTEORIAA

### 2.1 Satunnaismuuttujat

Lähtökohtana tilastollisessa päättelyssä on satunnaiskoe, jolla tarkoitetaan mitä tahansa koetta, jonka tuloksia ei tiedetä etukäteen. Satunnaiskokeen mahdollisten tulosten joukkoa  $\Omega$  sanotaan *otosavaruudeksi*. Otosavaruuden osajoukkoja sanotaan *tapahtumiksi*. Reaaliarvoista funktiota  $P$ , joka liittää jokaiseen tapahtumaan todennäköisyyden ja toteuttaa tietyt Kolmogorovin aksioomat, sanotaan *todennäköisyysmitaksi*. Otosavaruus  $\Omega$ , tapahtumien joukko  $\mathcal{F}$  ja todennäköisyysmitta  $P$  muodostavat todennäköisyysteorian perustan. Todennäköisyysteorian perusteita käsitellään tarkemmin esimerkiksi kirjoissa [7], [18] ja [13].

Usein on käytännöllisempää kuvata satunnaiskokeen alkuperäinen todennäköisyysrakenne johonkin helpommin käsiteltävään muotoon. Tämä voidaan tehdä *satunnaismuuttujan* avulla. Satunnaismuuttuja  $X$  on kuvaus otosavaruudelta  $\Omega$  reaalilukujen joukkoon. Se liittää siis jokaiseen otosavaruuden pisteeseen yksikäsitteisen reaaliluvun. Satunnaismuuttujan  $X$  *arvojoukko*

$$\mathcal{X} = \{X(w) \mid w \in \Omega\}$$

määrittelee nyt uuden otosavaruuden. Satunnaismuuttujaa  $X$  sanotaan diskreetiksi, jos sen arvojoukko on numeroituva. Jatkuvan satunnaismuuttujan arvojoukko on jokin reaalilukuväli. Otosavaruuden osajoukkojen  $A \subset \mathcal{X}$  todennäköisyydet saadaan nyt alkuperäisen todennäköisyysmitan  $P$  avulla yhtälöstä

$$P_X(X \in A) = P(\{w \in \Omega \mid X(w) \in A\}).$$

Todennäköisyysmittaa  $P_X$  sanotaan satunnaismuuttujan  $X$  indusoimaksi todennäköisyysmitaksi.

Satunnaismuuttujan jakauma voidaan määrätä sen *kertymäfunktion* avulla. Satunnaismuuttujan  $X$  kertymäfunktio  $F_X$  määritellään kaikille reaaliluvuille  $x$  yhtälöllä

$$F_X(x) = P_X(X \leq x). \quad (2.1)$$

Jos kahdella satunnaismuuttujalla on sama kertymäfunktio, niin satunnaismuuttujia sanotaan *identtisesti jakautuneiksi*. Kertymäfunktio määrää siis yksikäsitteisesti

satunnaismuuttujan jakauman. Kertymäfunktioilla on seuraavat ominaisuudet.

1.  $0 \leq F_X(x) \leq 1$  kaikilla reaaliluvuilla  $x$ .
2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} F_X(x) = 0$  ja  $\lim_{x \rightarrow \infty} F_X(x) = 1$ .
3. Jos  $x < y$ , niin  $F_X(x) \leq F_X(y)$ .
4. Kaikilla reaaliluvuille  $x_0$  on voimassa  $\lim_{x \rightarrow +x_0} F_X(x) = F_X(x_0)$ .

Usein ollaan kiinnostuneita myös satunnaismuuttujan yksittäisten arvojen todennäköisyyksistä. Diskreetin satunnaismuuttujan *pistetodennäköisyysfunktio*  $f_X$  määritellään kaikille reaaliluvuille  $x$  yhtälöllä

$$f_X(x) = P_X(X = x). \quad (2.2)$$

Jatkuvalle satunnaismuuttujalle kertymäfunktion ja todennäköisyysmitan ominaisuuksista seuraa, että yksittäisen arvon todennäköisyys on nolla. Tästä syystä ei jatkuvalle satunnaismuuttujalle ole järkevää puhua pistetodennäköisyyksistä. Sille voidaan kuitenkin määritellä pistetodennäköisyysfunktion vastine, jota sanotaan *tiheysfunktioksi*. Jatkuvan satunnaismuuttujan tiheysfunktio on reaaliarvoinen funktio  $f_X$ , joka toteuttaa kaikilla reaaliluvuilla  $x$  yhtälön

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

Jos funktio  $f_X$  on jatkuva, niin tiheysfunktio voidaan esittää kertymäfunktion derivaatan avulla

$$f_X(x) = \frac{d}{dx} F_X(x).$$

Pistetodennäköisyysfunktio ja tiheysfunktio ovat ei-negatiivisia. Lisäksi pistetodennäköisyysfunktioille  $f_X$  pätee yhtälö

$$\sum_{x \in \mathcal{X}} f_X(x) = 1.$$

Vastaavasti tiheysfunktioille  $f_X$  on voimassa yhtälö

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) dx = 1.$$

Jos asiayhteydestä on selvää mihin satunnaismuuttujaan kertymäfunktio tai tiheysfunktio viittaa, voidaan satunnaismuuttujan osoittava alaindeksi jättää merkitsemättä.

Satunnaismuuttujan odotusarvo on luku, joka kuvaa satunnaismuuttujan keskimääräistä tai tyypillistä arvoa. Mielivaltaiselle satunnaismuuttujan  $X$  funktiolle

$g(X)$  *odotusarvo* määritellään yhtälöllä

$$E(g(X)) = \sum_{x \in \mathcal{X}} g(x)P(X = x),$$

jos satunnaismuuttuja  $g(X)$  on diskreetti, ja yhtälöllä

$$E(g(X)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f_X(x)dx,$$

jos satunnaismuuttuja  $g(X)$  on jatkuva. Jos odotusarvon määrittelevä summa tai integraali ei suppene, ei odotusarvoa ole olemassa. Odotusarvo on lineaarinen operaatio, eli kaikille vakioille  $a$  ja  $b$  on voimassa yhtälö

$$E(aX + b) = aE(X) + b. \quad (2.3)$$

Tärkeitä odotusarvoja ovat satunnaismuuttujan  $X$  *origomomentit*  $\mu_k$ , jotka lasketaan kaavalla

$$\mu_k = E(X^k), \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.4)$$

*Keskusmomenteiksi* sanotaan odotusarvoja  $E[(X - \mu_1)^k]$ . Satunnaismuuttujan  $X$  *varianssi* on sen toinen keskusmomentti

$$\text{Var}(X) = E[(X - \mu_1)^2]. \quad (2.5)$$

Varianssi kuvaa satunnaismuuttujan arvojen keskimääräistä etäisyyttä odotusarvosta. Varianssin positiivista neliöjuurta sanotaan satunnaismuuttujan *keskihajonnaksi*. Varianssi voidaan lausua myös origomomenttien avulla seuraavasti

$$\text{Var}(X) = \mu_2 - \mu_1^2.$$

Varianssin määritelmästä ja yhtälöstä (2.3) seuraa, että kaikille vakioille  $a$  ja  $b$  on voimassa yhtälö

$$\text{Var}(aX + b) = a^2\text{Var}(X).$$

## 2.2 Satunnaisvektorit

Satunnaismuuttujan käsite voidaan yleistää myös useampaan ulottuvuuteen, jolloin puhutaan satunnaisvektoreista. Tässä kappaleessa esitellään lyhyesti tärkeimpiä satunnaisvektoreihin liittyviä käsitteitä. Tarkemmin satunnaisvektoreita käsitellään esimerkiksi kirjassa [6].

*Satunnaisvektori* on vektori  $\mathbf{X} = [X_1, \dots, X_k]^T$ , jonka alkiot  $X_1, \dots, X_k$  ovat satunnaismuuttujia. Satunnaisvektorin *yhteiskertymäfunktio*  $F$  määritellään kaikille

reaalisille vektoreille  $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_k]^T$  yhtälöllä

$$F(\mathbf{x}) = F(x_1, \dots, x_k) = P(X_1 \leq x_1, \dots, X_k \leq x_k).$$

Diskreetin satunnaisvektorin *yhteistodennäköisyysfunktio* määritellään yhtälöllä

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \dots, x_k) = P(X_1 = x_1, \dots, X_k = x_k).$$

Jatkuvan satunnaisvektorin *yhteistiheysfunktio* on reaaliarvoinen funktio  $f$ , joka toteuttaa yhtälön

$$F(x_1, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_k} f(t_1, \dots, t_k) dt_1 \cdots dt_k,$$

kaikille reaalityyppisille  $x_1, \dots, x_k$ . Yhteistiheysfunktion ja yhteistodennäköisyysfunktion avulla voidaan määrittää yksittäisten satunnaismuuttujien tiheysfunktiot ja pistetodennäköisyysfunktiot. Diskreetissä tapauksessa yksittäisen satunnaismuuttujan  $X_i$  marginaalijakauman pistetodennäköisyysfunktio  $f_{X_i}$  voidaan laskea kaavalla

$$f_{X_i}(x_i) = \sum_{(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_k) \in \mathbb{R}^{k-1}} f(x_1, \dots, x_k).$$

Vastaavasti jatkuvassa tapauksessa saadaan satunnaismuuttujan  $X_i$  marginaalijakauman tiheysfunktio  $f_{X_i}$  integroimalla yhteistiheysfunktiota  $f$  seuraavasti

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \dots, x_k) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_k.$$

Tärkeä käsite on satunnaismuuttujien *riippumattomuus*. Riippumattomat satunnaismuuttujat eivät sisällä tietoa toisistaan. Olkoon  $X_1, \dots, X_k$  satunnaismuuttujia, joilla on kertymäfunktiot  $F_{X_1}, \dots, F_{X_k}$ . Satunnaismuuttujat  $X_1, \dots, X_k$  ovat riippumattomia, jos kaikilla reaalityyppisillä  $x_1, \dots, x_k$  on voimassa yhtälö

$$F(x_1, \dots, x_k) = F_{X_1}(x_1) \cdots F_{X_k}(x_k), \quad (2.6)$$

missä  $F$  on satunnaisvektorin  $[X_1, \dots, X_k]^T$  yhteiskertymäfunktio. Riippumattomuus voidaan esittää myös tiheysfunktioiden avulla. Siis satunnaismuuttujat  $X_1, \dots, X_k$  ovat riippumattomia, jos kaikille reaalityyppisille  $x_1, \dots, x_k$  on voimassa yhtälö

$$f(x_1, \dots, x_k) = f_{X_1}(x_1) \cdots f_{X_k}(x_k),$$

missä  $f$  on satunnaisvektorin  $[X_1, \dots, X_k]^T$  yhteistiheysfunktio ja  $f_{X_i}$  satunnaismuuttujien  $X_i$  marginaalijakaumien tiheysfunktiot.

Olkoon  $X_1, \dots, X_n$  jatkuvia satunnaismuuttujia, joilla on yhteistiheysfunktio  $f$ . Jos  $g$  on reaaliarvoinen funktio, niin satunnaismuuttujan  $g(X_1, \dots, X_n) = g(\mathbf{X})$  odotusarvo on

$$E(g(\mathbf{X})) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(x_1, \dots, x_k) f(x_1, \dots, x_k) dx_1, \dots, dx_k.$$

Satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  välinen *kovarianssi* on odotusarvo

$$\text{Cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))].$$

Kovarianssi kuvaa satunnaismuuttujien  $X$  ja  $Y$  välistä riippuvuutta. Kovarianssi voidaan kirjoittaa muodossa

$$\text{Cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y).$$

Vektoreille ja matriiseille odotusarvo määritellään komponenteittain. Siis  $n \times k$  matriisille  $A$ , jonka alkiot  $X_{ij}$  ovat satunnaismuuttujia, saadaan odotusarvoksi

$$E(A) = \begin{bmatrix} E(X_{11}) & \cdots & E(X_{1k}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ E(X_{n1}) & \cdots & E(X_{nk}) \end{bmatrix}.$$

Satunnaisvektorin  $\mathbf{X}$  varianssi on  $n \times n$  matriisi

$$\text{Var}(\mathbf{X}) = E[(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu})^T],$$

missä  $\boldsymbol{\mu} = E(\mathbf{X})$ . Varianssi voidaan lausua muodossa

$$\text{Var}(\mathbf{X}) = E(\mathbf{X}\mathbf{X}^T) - \boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}^T.$$

Tästä nähdään, että varianssimatriisin  $ij$  alkio on satunnaismuuttujien  $X_i$  ja  $X_j$  välinen kovarianssi  $\text{Cov}(X_i, X_j)$ .

## 2.3 Jakaumia

Tyypillisesti tilastolliset jakaumat riippuvat yhdestä tai useammasta parametrasta. Jos satunnaismuuttujan  $X$  jakauma riippuu parametreista  $\theta_1, \dots, \theta_p$ , niin merkitään sen tiheysfunktio merkinnällä  $f(x | \theta_1, \dots, \theta_p)$ . Vastaavasti kertymäfunktioille käytetään merkintää  $F(x | \theta_1, \dots, \theta_p)$ . Tämän työn kannalta keskeiset perusjakaumat ovat normaali-jakauma ja sen yleistys useampaan ulottuvuuteen.

## Normaalijakauma

Normaalijakauma on eräs tärkeimmistä jakaumista todennäköisysteoriassa ja tilastotieteessä. Normaalijakauman tiheysfunktio on

$$f(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)}, \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.7)$$

missä parametreille on voimassa  $-\infty < \mu < \infty$  ja  $\sigma > 0$ . Jos satunnaismuuttujalla  $X$  on normaalijakauma parametrein  $\mu$  ja  $\sigma$ , niin merkitään tätä  $X \sim N(\mu, \sigma)$ . Normaalijakautuneen satunnaismuuttujan odotusarvo on  $\mu$  ja varianssi on  $\sigma^2$ . Jos on voimassa  $X \sim N(\mu, \sigma)$ , niin satunnaismuuttujalle

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

pätee  $Z \sim N(0, 1)$  [7, s. 102]. Jakaumaa  $N(0, 1)$  sanotaan *standardinormaalijakau-  
maks*i.

## Moniulotteinen normaalijakauma

Normaalijakauma voidaan yleistää myös useampaan ulottuvuuteen. Satunnaisvektori  $\mathbf{X}$  noudattaa  $k$ -ulotteista ei-singulaarista normaalijakaumaa, jos yhteistiheysfunktio on

$$f(\mathbf{x} | \boldsymbol{\mu}, \Sigma) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2} \sqrt{\det(\Sigma)}} e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})^T \Sigma^{-1}(\mathbf{x}-\boldsymbol{\mu})}, \quad (2.8)$$

missä parametreille pätee  $\boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}^k$  ja  $\Sigma \in \mathbb{R}^{k \times k}$  on symmetrinen ja positiivisesti definiitti matriisi. Käytetään tästä merkintää  $\mathbf{X} \sim N_k(\boldsymbol{\mu}, \Sigma)$ . Moniulotteisen normaalijakauman odotusarvo on  $\boldsymbol{\mu}$  ja varianssimatriisi on  $\Sigma$ .

## 2.4 Raja-arvolauseita

Tarkastellaan tässä kappaleessa satunnaismuuttujien jonon suppenemista. Todennäköisysteoriassa on olemassa useita suppenemiskäsitteitä, joista tämän työn kannalta tärkein on satunnaismuuttujien jakauman suppeneminen. Olkoon  $F_n$  satunnaismuuttujan  $X_n$  jakauman kertymäfunktio. Satunnaismuuttujien jono

$$\{X_n\} = \{X_1, X_2, \dots\}$$

*suppenee jakaumaltaan* kohti satunnaismuuttujaa  $X$ , jos jokaisessa satunnaismuuttujan  $X$  kertymäfunktion  $F$  jatkuvuusasteessa  $x$  on voimassa yhtälö

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F(x). \quad (2.9)$$

Käytetään tästä merkintää

$$X_n \xrightarrow{D} X.$$

Yhtälön (2.9) määritelmä yleistyy myös satunnaisvektorien jonolle  $\{\mathbf{X}_n\}$ , kun funktiot  $F_n$  ja  $F$  korvataan vastaavilla yhteiskertymäfunktioilla. Rajajakauman  $F$  hyöty on tilanteissa, missä todellinen jakauma  $F_n$  on hankala määrittää. Tällöin, jos otoskoko  $n$  on riittävän suuri, voidaan tehdä approksimaatio  $F_n \approx F$ .

Normaalijakaumalla on keskeinen rooli raja-arvotarkasteluissa. Tämä johtuu siitä, että riippumattomien ja identtisesti jakautuneiden satunnaismuuttujien summan jakauma lähestyy normaalijakaumaa otoskoon kasvaessa. Tätä tulosta sanotaan *keskeiseksi raja-arvolauseeksi*.

**Lause 2.4.1** (Keskeinen raja-arvolause). *Olkoon  $X_1, X_2, \dots$  jono riippumattomia ja identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia. Oletetaan, että*

$$E(X_i) = \mu < \infty \quad \text{ja} \quad \text{Var}(X_i) = \sigma^2 < \infty.$$

*Tällöin*

$$\frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu)}{\sigma} \xrightarrow{D} X \sim N(0, 1),$$

*missä  $\bar{X}_n = (1/n) \sum_{i=1}^n X_i$ .*

Keskeisen raja-arvolauseen nojalla riippumattomien ja identtisesti jakautuneiden satunnaismuuttujien summan jakaumaa voidaan approksimoida normaalijakaumalla. Erityisen hyödyllistä on, että tulos ei riipu satunnaismuuttujien  $X_i$  todellisesta jakaumasta. Ainoat ehdot jakaumalle ovat äärellinen odotusarvo ja varianssi. On huomattava, että lauseen tulos ei kerro mitään approksimaation tarkkuudesta, joka riippuu satunnaismuuttujien  $X_i$  jakaumasta ja otoskoon  $n$  suuruudesta. Normaaliapproksimaatiota käytettäessä yleinen sääntö otoskoon suuruudelle on  $n \geq 30$ , kuitenkin pienemmilläkin otoskoilla saavutetaan hyvä tarkkuus, jos satunnaismuuttujien  $X_i$  jakauma on muodoltaan lähellä normaalijakaumaa [29, s. 245].

Olkoon  $g$   $k$ -ulotteisen satunnaisvektorin  $\mathbf{X}_n$  reaaliarvoinen funktio. Usein ollaan kiinnostuneita satunnaismuuttujien jonon  $\{g(\mathbf{X}_n)\}$  rajajakaumasta, kun satunnaisvektorien jonon  $\{\mathbf{X}_n\}$  rajajakauma tunnetaan. Erityisesti kiinnostava on tilanne, missä jonon  $\{\mathbf{X}_n\}$  rajajakauma on moniulotteinen normaalijakauma. Tässä tapauksessa voidaan osoittaa, että satunnaismuuttujien  $g(\mathbf{X}_n)$  jakauma lähestyy tietyin ehdoin normaalijakaumaa otoskoon kasvaessa. Tätä tulosta sanotaan *delta-säännöksi*.

**Lause 2.4.2** (Delta-sääntö). [26, s. 211] *Olkoon  $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$  jono  $k$ -ulotteisia satunnaisvektoreita, joille pätee*

$$\sqrt{n}(\mathbf{X}_n - \theta) \xrightarrow{D} \mathbf{X} \sim N_k(\mathbf{0}, \Sigma),$$



missä  $\theta$  on annettu reaalinen vektori. Olkoon  $g$  reaaliarvoinen funktio. Oletetaan, että gradientti  $\nabla g(\theta)$  on jatkuva arvon  $\theta$  ympäristössä ja  $\nabla g(\theta) \neq \mathbf{0}$ . Tällöin

$$\sqrt{n} [g(\mathbf{X}_n) - g(\theta)] \xrightarrow{D} Z \sim N(0, [\nabla g(\theta)]^T \Sigma [\nabla g(\theta)]).$$

### 3. ESTIMOINTI JA HYPOTEESEN TESTAUS

#### 3.1 Satunnaisotos

Tilastollisessa päättelyssä pyritään tekemään päätelmiä jonkin populaation jakaumasta. Päätelmät perustuvat populaatiosta tehtyihin yksittäisiin havaintoihin, jotka muodostavat yhdessä otoksen, joka on populaation osajoukko. Jotta tehdyt päätelmät olisivat perusteltuja, täytyy otoksen edustaa riittävän hyvin koko populaatiota.

Otos kerätään tyypillisesti satunnaisotannalla, jolla tarkoitetaan, että jokainen havainto tehdään satunnaisesti ja toisistaan riippumatta. Jos lisäksi jokaisella populaation alkiolla on sama todennäköisyys tulla valituksi otokseen puhutaan yksinkertaisesta satunnaisotannasta. Otanta voidaan tehdä joko palauttaen, jolloin jokaisen havainnon jälkeen palautetaan havaittu populaation alkio takaisin, tai ilman palautusta.

Tässä työssä määritellään *satunnaisotos* tarkoittamaan riippumattomia ja identtisesti jakautuneita satunnaismuuttujia  $X_1, \dots, X_n$ . Esimerkiksi yksinkertaisella satunnaisotannalla palauttaen kerätty satunnaisotos muodostaa tällaisen otoksen. Otannan tuloksena saatuja todellisia arvoja  $x_1, \dots, x_n$  sanotaan *realisoituneeksi otokseksi*.

Satunnaisotoksen funktiota  $T(X_1, \dots, X_n)$  sanotaan *statistiikaksi* tai *otossuureeksi*. Koska otossuure on satunnaismuuttujien funktio, on se myös itsessään satunnaismuuttuja. Tärkeitä otossuureita ovat *otoskeskiarvo*

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

ja *otosvarianssi*

$$S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2.$$

Otoskeskiarvo ja otosvarianssi estimoivat vastaavasti populaation odotusarvoa ja varianssia.

Populaation kertymäfunktioita voidaan estimoida *empiirisen kertymäfunktion* avulla. Olkoon  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  kasvavaan järjestykseen järjestetty realisoitunut otos.

Empiirinen kertymäfunktio määritellään yhtälöllä

$$\hat{F}(x) = \begin{cases} 0, & x < x_{(1)} \\ \frac{i}{n}, & x_{(i)} \leq x < x_{(i+1)}, \quad i = 1, \dots, n \\ 1, & x > x_{(n)}. \end{cases}$$

### 3.2 Piste-estimointi

Piste-estimoinnissa oletetaan, että populaation tuntematon jakauma riippuu yhdestä tai useammasta parametrista, joita pyritään estimoimaan satunnaisotoksen avulla. Olkoon  $X_1, \dots, X_n$  satunnaisotos jakaumasta, jonka tiheysfunktio on  $f(x|\theta)$ . Tavoitteena on estimoida tuntematonta parametria  $\theta$ . *Estimaattori*  $W_n$  on otossuure

$$W_n = W(X_1, \dots, X_n).$$

Estimaattorin realisoitunutta arvoa  $W(x_1, \dots, x_n)$  sanotaan *estimaatiksi*. Koska estimaattori on satunnaismuuttujien funktio, niin estimaattori on itsessään satunnaismuuttuja, joten sille voidaan määritellä odotusarvo  $E_\theta(W_n)$  ja varianssi  $\text{Var}_\theta(W_n)$ . Alaindeksillä  $\theta$  korostetaan, että odotusarvo ja varianssi ovat tyypillisesti parametrin  $\theta$  funktioita.

Jos parametrin  $\theta$  estimaattorin  $W_n$  odotusarvolle pätee yhtälö

$$E_\theta(W_n) = \theta$$

niin estimaattorin sanotaan olevan *harhaton*. Harhaton estimaattori ei siis sisällä systemaattista virhettä. Esimerkiksi otoskeskiarvo  $\bar{X}_n$  ja otosvariassi  $S_n^2$  ovat jakauman odotusarvon ja varianssin harhattomia estimaattoreita. Estimaattorin *harha* määritellään yhtälöllä

$$\text{Bias}_\theta(W_n) = E_\theta(W_n) - \theta.$$

Harhattomalle estimaattorille siis  $\text{Bias}_\theta(W_n) = 0$ .

Usein tietylle parametrille voidaan löytää useita eri estimaattoreita, jolloin estimaattoreista halutaan valita jossain mielessä paras. Usein käytetty mitta estimaattoireiden hyvyydellä on *keskineliövirhe* (*Mean Squared Error*, MSE), joka määritellään yhtälöllä

$$\text{MSE}_\theta(W_n) = E_\theta [(W_n - \theta)^2]. \quad (3.1)$$

Jos kaikilla parametrin  $\theta$  arvoilla estimaattorin  $W_n$  keskineliövirhe on pienempi kuin samankokoiseen otokseen perustuvan estimaattorin  $T_n$  keskineliövirhe, niin estimaattori  $W_n$  on *tehokkaampi* kuin estimaattori  $T_n$ . Keskineliövirhe voidaan lausua esti-

maattorin harhan ja varianssin avulla seuraavasti

$$E[(W - \theta)^2] = \text{Var}_\theta(W_n) + [\text{Bias}_\theta(W_n)]^2. \quad (3.2)$$

Yhtälöstä (3.2) nähdään, että keskineliövirhe koostuu estimaattorin harhasta ja varianssista. Estimaattori  $W_n$  on *tarkentuva*, jos pätee

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[(W_n - \theta)^2] = 0.$$

Kun otoskoko  $n$  kasvaa rajatta, on tarkentuva estimaattori suurella todennäköisyydellä lähellä todellista parametrin arvoa [7, s. 468]. Yhtälön (3.2) perusteella tarkentuvuus on yhtäpitävää sen kanssa, että estimaattorin varianssi ja harha lähestyvät nollaa otoskoon kasvaessa.

Yleensä halutaan, että estimaattori on jossain mielessä optimaalinen. Harhattomille estimaattoreille luonnollinen ehto on, että estimaattorin varianssi on mahdollisimman pieni. Tarkemmin estimaattori  $W_n^*$  on parametrin  $\theta$  *paras harhaton estimaattori*, jos se on harhaton kaikilla parametrin  $\theta$  arvoilla, ja mille tahansa muulle parametrin  $\theta$  harhattomalle estimaattorille  $W_n$  on voimassa epäyhtälö

$$\text{Var}_\theta(W_n^*) \leq \text{Var}_\theta(W_n)$$

kaikilla parametrin  $\theta$  arvoilla. Tiettyjen säännöllisyysehtojen ollessa voimassa harhattoman estimaattorin varianssille voidaan johtaa alaraja

$$\text{Var}_\theta(W_n) \geq \frac{1}{nI(\theta)}, \quad (3.3)$$

missä arvoa  $I(\theta) = E[(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X | \theta))^2]$  sanotaan jakauman *Fisherin informaatioksi* [13, s. 178]. Epäyhtälöä (3.3) sanotaan *Cramér-Raon epäyhtälöksi*. Jos tiheysfunktio  $f(x | \theta)$  toteuttaa ehdon

$$\frac{d}{d\theta} E \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X | \theta) \right) = \int \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left( \frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(x | \theta) \right) f(x | \theta) \right] dx,$$

niin Fisherin informaatio voidaan kirjoittaa helpommin laskettavassa muodossa [7, ss. 337-338]

$$I(\theta) = -E \left( \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(X | \theta) \right).$$

Paras harhaton estimaattori voidaan nyt löytää etsimällä estimaattori, joka saavuttaa Cramér-Raon epäyhtälön määrittämän alarajan.

Tarkastellaan vielä miten estimaattorin varianssi käyttäytyy otoskoon kasvaessa.

Oletetaan, että estimaattorille  $W_n$  on voimassa tulos

$$\sqrt{n}(W_n - \theta) \xrightarrow{D} W \sim N(0, v(\theta)).$$

Varianssia  $v(\theta)$  sanotaan estimaattorin  $W_n$  *asymptoottiseksi varianssiksi*. Jos asymptoottinen varianssi saavuttaa Cramér-Raon alarajan, siis asymptoottiselle varianssille on voimassa yhtälö

$$v(\theta) = \frac{1}{\mathbb{E}[(\frac{\partial}{\partial \theta} \ln f(X | \theta))^2]}$$

niin estimaattoria sanotaan parametrin  $\theta$  *asymptoottisesti tehokkaaksi estimaattoriksi*. Asymptoottisesti tehokkaat estimaattorit muodostavat tärkeän estimaattoreiden luokan, koska jos otoskoko  $n$  on suuri, voidaan asymptoottisesti tehokkaan estimaattorin  $W_n$  varianssia approksimoida yhtälöllä [7, s. 473]

$$\text{Var}_\theta(W_n) \approx \frac{1}{nI(\theta)},$$

missä  $I(\theta)$  on jakauman Fisherin informaatio. Esimerkiksi kappaleessa 3.3.2 esiteltävä suurimman uskottavuuden estimaattori on hyvin yleisillä säännöllisyys ehdoilla asymptoottisesti tehokas.

### 3.3 Estimointimenetelmiä

#### 3.3.1 Momenttimenetelmä

Momenttimenetelmä on eräs vanhimmista estimointimenetelmistä. Momenttimenetelmän ideana on asettaa populaation jakauman teoreettiset momentit yhtäsuuriksi kuin otoksen vastaavat momentit. Teoreettiset momentit ovat jakauman parametrien funktioita, joten näin saadusta yhtälöryhmästä voidaan ratkaista estimaatit parametreille.

Olkoon  $X_1, \dots, X_n$  satunnaisotos jakaumasta, jonka tiheysfunktio on  $f(x|\theta_1, \dots, \theta_k)$ . Otosmomentit saadaan yhtälöistä

$$m_p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^p, \quad p = 1, \dots, k$$

ja jakauman teoreettiset momentit yhtälöistä

$$\mu_p = \mathbb{E}(X^p), \quad p = 1, \dots, k.$$

Nyt momenttiestimaattorit  $\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k$  parametreille  $\theta_1, \dots, \theta_k$  saadaan yhtälöryh-

mästä [7, ss. 312-313]

$$\begin{aligned} m_1 &= \mu_1(\theta_1, \dots, \theta_k) \\ &\vdots \\ m_k &= \mu_k(\theta_1, \dots, \theta_k). \end{aligned}$$

Tässä momentteina on käytetty origomomentteja, mutta yhtä hyvin voidaan käyttää myös keskusmomentteja.

Momenttiestimaattorit ovat usein yksinkertaisia laskea, mutta ne ovat harvoin tehkköimpia mahdollisia estimaattoreita [2, s. 52]. Niiden antamia estimaatteja voidaan kuitenkin käyttää lähtökohtana paremmille menetelmille, kuten suurimman uskottavuuden estimoinnille.

### 3.3.2 Suurimman uskottavuuden menetelmä

Olkoon  $X_1, \dots, X_n$  satunnaisotos jakaumasta, jonka tiheysfunktio on  $f(x | \theta_1, \dots, \theta_k)$ . Suurimman uskottavuuden menetelmässä etsitään parametreille  $\theta_1, \dots, \theta_k$  arvot, jotka maksimoivat *uskottavuusfunktion* [7, s. 315-316]

$$L(\theta | \mathbf{x}) = L(\theta_1, \dots, \theta_k | x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f(x_i | \theta_1, \dots, \theta_k). \quad (3.4)$$

Suurimman uskottavuuden estimaattori on nyt

$$\hat{\theta}(X_1, \dots, X_n) = \arg \max_{\theta} L(\theta | X_1, \dots, X_n). \quad (3.5)$$

Usein uskottavuusfunktion maksimointi helpottuu kun käytetään loguskottavuusfunktiota, joka saadaan ottamalla uskottavuusfunktion luonnollinen logaritmi

$$l(\theta | \mathbf{x}) = \ln L(\theta | \mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \ln f(x_i | \theta_1, \dots, \theta_k). \quad (3.6)$$

Koska logaritmifunktio on aidosti kasvava, niin loguskottavuusfunktio saa maksiminsa samassa pisteessä kuin uskottavuusfunktio.

Jos loguskottavuusfunktio  $l(\theta | \mathbf{x})$  on derivoituva ja parametriavaruus  $\Theta \subset \mathbb{R}^k$  on avoin joukko, niin välttämätön ehto maksimipisteelle on, että osittaisderivaatat tässä pisteessä ovat nollija. Siis maksimipiste  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_k)$  toteuttaa yhtälöryhmän [13, s. 183]

$$\frac{\partial}{\partial \theta_i} l(\hat{\theta} | \mathbf{x}) = 0, \quad i = 1, \dots, k. \quad (3.7)$$

Usein maksimipisteelle ei voida antaa analyttistä ratkaisua. Tällöin voidaan rat-

kaista yhtälöryhmä (3.7) käyttäen numeerisia menetelmiä. Vaihtoehtoisesti voidaan maksimoida numeerisesti suoraan lauseke (3.4) tai (3.6).

Suurimman uskottavuuden estimaattia ei aina ole olemassa, tai se ei ole yksikäsitteinen, kuitenkin suurimmassa osassa tapauksista suurimman uskottavuuden estimaatti on olemassa ja yksikäsitteinen [2, s. 53]. Lisäksi joissakin tapauksissa suurimman uskottavuuden estimaattori on hyvin herkkä pienille muutoksille datassa. Tällöin pieni muutos havainnossa tuottaa hyvin suuren muutoksen estimaatissa [7, s. 316].

Seuraavassa lausessa esitetään eräs suurimman uskottavuuden estimaattorin tärkeä ominaisuus: hyvin yleisillä säännöllisyyssehdolla suurimman uskottavuuden estimaattori on asympotoottisesti tehokas ja tarkentuva.

**Lause 3.3.1.** *Olkoon  $X_1, \dots, X_n$  otos jakaumasta  $f(x | \theta)$ , ja olkoon  $\hat{\theta}$  parametrin  $\theta$  suurimman uskottavuuden estimaattori. Tiettyjen säännöllisyyssehtojen ollessa voimassa [7, s. 516]*

$$\sqrt{n} [\hat{\theta} - \theta] \xrightarrow{D} Z \sim N(0, V(\theta)),$$

missä

$$V(\theta) = \frac{1}{E \left( -\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln f(X | \theta) \right)}.$$

Tämän tuloksen nojalla suurimman uskottavuuden estimaattorin  $\hat{\theta}$  varianssia voidaan approksimoida yhtälöllä

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \approx \frac{1}{nV(\theta)}, \quad (3.8)$$

missä funktion  $V(\theta)$  arvo lasketaan saadussa suurimman uskottavuuden estimaatissa.

Lauseen 3.3.1 tulos yleistyy myös tapaukseen missä jakaumalla on useita parametreja  $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]^T$ . Tällöin suurimman uskottavuuden estimaattori on satunnaisvektori  $\hat{\theta} = [\hat{\theta}_1, \dots, \hat{\theta}_p]^T$ , ja säännöllisyyssehtojen ollessa voimassa [16, s. 78]

$$\sqrt{n} [\hat{\theta} - \theta] \xrightarrow{D} Z \sim N_p(0, V(\theta)),$$

missä  $V(\theta) = I(\theta)^{-1}$ , ja  $I(\theta)$  on matriisi, jonka alkiot ovat

$$[I(\theta)]_{ij} = E \left( -\frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln f(X | \theta_1, \dots, \theta_p) \right), \quad i, j = 1, \dots, p. \quad (3.9)$$

Matriisia  $I(\theta)$  sanotaan *jakauman Fisherin informaatiomatriisiksi*. Näin ollen otokoon  $n$  ollessa suuri, saadaan suurimman uskottavuuden estimaattorin varianssimatriisille approksimaatio

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \approx [nI(\theta)]^{-1} \quad (3.10)$$

missä matriisin  $I(\theta)$  arvo lasketaan saadussa suurimman uskottavuuden estimaatissa. Matriisia  $nI(\theta)$  voidaan approksimoida *havaitulla informaatiomatriisilla*  $\hat{I}(\theta)$

$$\left[\hat{I}(\theta)\right]_{ij} = -\frac{\partial^2}{\partial\theta_i\partial\theta_j} \ln f(\mathbf{x}|\theta), \quad i, j = 1, \dots, p, \quad (3.11)$$

jonka arvo lasketaan saadussa suurimman uskottavuuden estimaatissa.

Tässä työssä suurimman uskottavuuden estimaattorin varianssille lasketaan approksimaatio käyttäen Fisherin informaatiomatriisi. Todetaan kuitenkin, että joissakin tapauksissa havaitun informaatiomatriisin käyttäminen voi antaa parempia tuloksia verrattuna Fisherin informaatiomatriisiin [2, s. 92].

### 3.4 Hypoteesin testaus

Hypoteesiksi sanotaan jotain populaation jakaumaa koskevaa väitettä. Esimerkiksi jakauman parametria  $\theta$  koskeva hypoteesi voidaan esittää yleisesti muodossa

$$\begin{aligned} H_0: \theta &\in \Theta_0 \\ H_1: \theta &\in \Theta - \Theta_0, \end{aligned}$$

missä  $\Theta$  on jakauman mahdollisten parametrien joukko ja  $\Theta_0 \subset \Theta$ . Väitettä  $H_0$  sanotaan *nollahypoteesiksi* ja väitettä  $H_1$  *vastahypoteesiksi*. Väite voi olla myös yleisempi väittämä populaation jakaumasta. Tällöin nollahypoteesi voi olla esimerkiksi

$$H_0: \text{Todellinen jakauma on } F,$$

missä  $F$  on populaation oletettu jakauma. Tämän tyyppistä hypoteesia sanotaan parametrittomaksi hypoteesiksi.

*Testeiksi* sanotaan päätössääntöä, joka määrittelee millä realisoituneen otoksen  $x_1, \dots, x_n$  arvoilla nollahypoteesi hyväksytään, ja millä arvoilla nollahypoteesi hylätään. Otosavaruuden osajoukkoa, missä nollahypoteesi hylätään, sanotaan kriittiseksi alueeksi. Testit määritellään tyypillisesti testisuureen  $W_n = W(X_1, \dots, X_n)$  avulla. Tällöin päätös nollahypoteesin hylkäämisestä tai hyväksymisestä tehdään testisuureen realisoituneen arvon  $W(x_1, \dots, x_n)$  perusteella.

Hypoteesin testauksessa voidaan tehdä kahdenlaisia virheitä. Jos nollahypoteesi  $H_0$  hylätään, kun todellisuudessa se on voimassa, tehdään I lajin virhe (hylkäämisvirhe). Vastaavasti, jos nollahypoteesi  $H_0$  hyväksytään, kun todellisuudessa se pitäisi hylätä, tehdään II lajin virhe (hyväksymisvirhe). Yleensä testit laaditaan siten, että tyyppin I virhettä pidetään vakavampana. Tällöin nollahypoteesi hylätään vasta, kun se aineiston perusteella tuntuu hyvin epätodennäköiseltä. [13, s. 193]

Testien tulokset voidaan ilmoittaa *p-arvon* avulla, joka on luku välillä  $[0, 1]$ . Mitä



pienempi  $p$ -arvo on, sitä vahvemmin tulokset viittaavat nollahypoteesin hylkäämiseen. Jos nollahypoteesi hylätään, kun  $p \leq \alpha$  sanotaan, että nollahypoteesi hylätään *riskitasolla*  $\alpha$ . [7, s. 397] Tyypillinen arvo riskitasolle on esimerkiksi  $\alpha = 0.05$ .

### 3.4.1 Kolmogorov-Smirnov testi

Kolmogorov-Smirnov testissä arveltua kertymäfunktioita  $F$  verrataan otoksen empiiriseen kertymäfunktioon  $\hat{F}$ . Nollahypoteesina on

$$H_0: \text{Otos on jakaumasta } F.$$

Kolmogorov-Smirnov testissä tarkastellaan suurinta etäisyyttä  $D_n$  empiirisen kertymäfunktion  $\hat{F}$  ja arvellun kertymäfunktion  $F$  välillä

$$D_n = \sup_t |F(t) - \hat{F}(t)|.$$

Olko  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  järjestetty otos. Empiirisen kertymäfunktion määritelmän nojalla etäisyys voidaan kirjoittaa muotoon [19, s. 336]

$$D_n = \max_i (\delta_i), \quad (3.12)$$

missä

$$\delta_i = \max \left( \frac{i}{n} - F(x_{(i)}), F(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right). \quad (3.13)$$

Kolmogorov-Smirnov testin testisuureet ovat nyt

$$K_n^+ = \sqrt{n} \max_i \left[ \frac{i}{n} - F(x_{(i)}) \right] \quad (3.14)$$

ja

$$K_n^- = \sqrt{n} \max_i \left[ F(x_{(i)}) - \frac{i-1}{n} \right]. \quad (3.15)$$

Olettaen, että oikea jakauma on  $F$ , niin näillä testisuureilla on sama jakauma, joka ei riipu jakaumasta  $F$ . [25, s. 37]

Tarkastellaan mitä saadaan testisuuren  $K_n^+$  jakaumaksi. Epäyhtälö

$$K_n^+ \leq \frac{y}{\sqrt{n}}$$

on testisuureen  $K_n^+$  määritelmän nojalla yhtäpitävä sen kanssa, että

$$\frac{i}{n} - F(x_{(i)}) \leq \frac{y}{n}, \quad \text{kaikilla } i = 1, \dots, n.$$

Tämä epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon

$$nF(x_{(i)}) \geq i - y, \quad \text{kaikilla } i = 1, \dots, n.$$

Koska  $F$  on kasvava ja satunnaismuuttujalla  $U = F(T)$  on tasajakauma välillä  $[0, 1]$ , niin arvot  $nF(x_{(1)}), \dots, nF(x_{(n)})$  voidaan tulkita kasvavaan järjestykseen lajitelluksi otokseksi satunnaismuuttujasta  $V = nU$ , jolla on tasajakauma välillä  $[0, n]$ . Otoksen alkiot  $V_1, \dots, V_n$  ovat riippumattomia satunnaismuuttujia, joilla on sama jakauma, joten ehdollisen todennäköisyyden määritelmän mukaan

$$\begin{aligned} P\left(K_n^+ \leq \frac{y}{\sqrt{n}}\right) &= P(V_1 \geq 1 - y, \dots, V_n \geq n - y \mid V_1 < \dots < V_n) \\ &= \frac{P(1 - y \leq V_1 < V_2, \dots, n - 1 - y \leq V_{n-1} < V_n, n - y \leq V_n)}{P(V_1 < \dots < V_{n-1} < V_n)} \\ &= \frac{\int_{n-y}^n \int_{n-1-y}^{x_n} \dots \int_{1-y}^{x_2} dx_1 dx_2 \dots dx_n}{\int_0^n \int_0^{x_n} \dots \int_0^{x_2} dx_1 dx_2 \dots dx_n}. \end{aligned}$$

Voidaan osoittaa, että testisuureen  $K_n^+$  kertymäfunktioksi saadaan

$$P\left(K_n^+ \leq \frac{y}{\sqrt{n}}\right) = \frac{y}{n^n} \sum_{k=0}^{\lfloor y \rfloor} \binom{n}{k} (k - y)^k (y + n - k)^{n-k-1}, \quad (3.16)$$

olettaen, että  $F$  on oikea kertymäfunktio. Kaavaa (3.16) sanotaan *Birnbaum-Tingeyn kaavaksi*. [25, s. 37]

Jos satunnaismuuttujan  $T$  kertymäfunktio on  $F(t)$ , niin satunnaismuuttujan  $-T$  kertymäfunktio on  $1 - F(-t)$ . Lisäksi, koska

$$(1 - \hat{F}(-t)) - (1 - F(-t)) = F(-t) - \hat{F}(-t)$$

niin satunnaismuuttujalle  $-T$  saatu  $K_n^+$  on sama, kuin satunnaismuuttujalle  $T$  saatu  $K_n^-$ . Koska testisuureen  $K_n^+$  jakauma on satunnaismuuttujasta  $T$  riippumaton, niin testisuureella  $K_n^-$  on sama jakauma kuin testisuureella  $K_n^+$ . Näin ollen Birnbaum-Tingeyn kaavaa voidaan käyttää myös testisuureen  $K_n^-$  kertymäfunktion arvojen laskemiseen.

Jos testisuureen  $K_n^+$  realisoitunut arvo on  $z$ , niin riski  $p$ , jolla nollahypoteesi hylätään turhaan on

$$p = 1 - P\left(K_n^+ \leq \frac{y}{\sqrt{n}}\right), \quad \text{missä } y = \sqrt{n}z. \quad (3.17)$$

Vastaavasti voidaan laskea riski testisuurelle  $K_n^-$ . Käytännössä testi kannattaa suorittaa käyttäen molempia testisuureita  $K_n^+$  ja  $K_n^-$  jakaen riski puoliksi molemmille

suureille. [25, s. 38]

## 4. ÄÄRIARVOTEORIAA

### 4.1 Maksimiarvojakaumat

Ääriarvoteoria tutkii jossain mielessä äärimmäisten tapahtumien todennäköisyyksiä. Tässä työssä kiinnostuksen kohteena on satunnaismuuttujien joukon maksimin jakauma. Tarkastellaan siis satunnaismuuttujaa

$$M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\},$$

missä satunnaismuuttujat  $X_1, \dots, X_n$  ovat riippumattomia ja identtisesti jakautuneita. Minimiarvojen jakauma saadaan maksimiarvojen avulla, sillä [8, s. 53]

$$\min(X_1, \dots, X_n) = -\max(-X_1, \dots, -X_n).$$

Ääriarvoteoriassa ollaan kiinnostuneita satunnaismuuttujan  $M_n$  rajajakaumasta, kun indeksi  $n$  kasvaa rajatta. Jos satunnaismuuttujien  $X_i$  jakauma tiedetään, niin satunnaismuuttujan  $M_n$  jakauma voidaan teoriassa ratkaista seuraavasti

$$\begin{aligned} P(M_n \leq z) &= P(X_1 \leq z, \dots, X_n \leq z) \\ &= P(X_1 \leq z) \dots P(X_n \leq z) \\ &= [F(z)]^n, \end{aligned}$$

missä  $F$  on satunnaismuuttujien  $X_i$  kertymäfunktio. Ottamalla raja-arvo saadaan tulos [10, s. 3-4]

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F(z)^n = \begin{cases} 0, & z < z_* \\ 1, & z \geq z_* \end{cases}$$

missä  $z_* = \sup\{z \mid F(z) < 1\}$  kertymäfunktion  $F$  oikea loppupiste, joka voi olla ääretön. Satunnaismuuttujan  $M_n$  jakauma lähestyy siis degeneroitunutta jakaumaa. Jotta saataisiin ei-degeneroitunut rajajakauma, tehdään satunnaismuuttujalle  $M_n$  normalisointi

$$M_n^* = \frac{M_n - b_n}{a_n}, \quad (4.1)$$

missä vakiojonot  $\{a_n > 0\}$  ja  $\{b_n\}$  valitaan siten, että satunnaismuuttujalla  $M_n^*$  on ei-degeneroitunut rajajakauma [10, s. 4]. Toisin sanoen vakiojonot valitaan siten,

että

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(a_n x + b_n) = G(x) \quad (4.2)$$

kaikilla luvuilla  $x$  joilla  $G$  on jatkuva, ja missä  $G$  on ei-degeneroitunut kertymäfunktio. Rajajakaumaa  $G$  sanotaan *ääriarvojakaumaksi*.

Oletetaan, että yhtälö (4.2) on voimassa. Tällöin voidaan riittävän suurella indeksin  $n$  arvolla tehdä approksimaatio

$$P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right) \approx G(z).$$

Koska  $n$  on suuri, niin  $nk$  on myös suuri kaikilla positiivisilla kokonaisluvuilla  $k$ , joten voidaan tehdä approksimaatio

$$P\left(\frac{M_{nk} - b_{nk}}{a_{nk}} \leq z\right) \approx G(z). \quad (4.3)$$

Toisaalta, koska  $M_{nk}$  on  $k$ :n satunnaismuuttujan maksimi, joilla kaikilla on sama jakauma kuin satunnaismuuttujalla  $M_n$ , niin

$$P\left(\frac{M_{nk} - b_n}{a_n} \leq z\right) = \left[P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq z\right)\right]^k. \quad (4.4)$$

Siis yhtälöistä (4.3) ja (4.4) saadaan approksimaatiot

$$P(M_{nk} \leq z) \approx G\left(\frac{z - b_{nk}}{a_{nk}}\right)$$

ja

$$P(M_{nk} \leq z) \approx G^k\left(\frac{z - b_n}{a_n}\right),$$

joten

$$G\left(\frac{z - b_{nk}}{a_{nk}}\right) \approx G^k\left(\frac{z - b_n}{a_n}\right).$$

Tästä nähdään, että kertymäfunktio  $G$  ja  $G^k$  ovat likimain samat lukuunottamatta lokaatio- ja skaalakertoimia. Tätä jakauman ominaisuutta sanotaan *max-stabiilisuudeksi*. Tarkemmin, jos kaikilla kokonaisluvuilla  $k = 1, 2, \dots$  löytyy vakiot  $\alpha_k > 0$  ja  $\beta_k$  siten, että

$$G^k(\alpha_k z + \beta_k) = G(z)$$

niin jakaumaa  $G$  sanotaan max-stabiiliksi [8, ss. 50-51].

Mahdolliset ääriarvojakaumat  $G$  saadaan nyt tarkastelemalla kaikkia mahdollisia max-stabiileita jakaumia. Voidaan osoittaa, että jakauma on max-stabiili täsmälleen

silloin, jos se kuuluu johonkin seuraavista luokista [8]

$$\begin{aligned} \text{I: } G(z) &= \exp \left\{ -\exp \left[ -\left( \frac{z-\mu}{\sigma} \right) \right] \right\}, \quad -\infty < z < \infty \\ \text{II: } G(z) &= \begin{cases} 0, & z \leq \mu \\ \exp \left[ -\left( \frac{z-\mu}{\sigma} \right)^{-\alpha} \right], & z > \mu \end{cases} \\ \text{III: } G(z) &= \begin{cases} \exp \left\{ -\left[ -\left( \frac{z-\mu}{\sigma} \right) \right]^\alpha \right\}, & z < \mu \\ 1, & z \geq \mu \end{cases} \end{aligned}$$

missä parametrit  $\mu \in \mathbb{R}$  ja  $\sigma, \alpha > 0$ . Parametria  $\mu$  sanotaan *lokaatioparametriksi*, parametria  $\sigma$  *skaalaparametriksi* ja parametria  $\alpha$  *muotoparametriksi*. Tyypin I ääriarvojakaumaa sanotaan Gumbelin jakaumaksi ja tyypin II ääriarvojakaumaa Fréchet'n jakaumaksi. Tyypin III ääriarvojakaumaa sanotaan myös Weibullin ääriarvojakaumaksi.

Ääriarvojakaumat voidaan yhdistää yhdeksi perheeksi, jonka kertymäfunktio on muotoa [8, s. 47]

$$G(z) = \begin{cases} \exp \left\{ -\left[ 1 + \xi \left( \frac{z-\mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\}, & \xi \neq 0, \quad 1 + \xi \left( \frac{z-\mu}{\sigma} \right) > 0 \\ \exp \left\{ -\exp \left[ -\left( \frac{z-\mu}{\sigma} \right) \right] \right\}, & \xi = 0, \quad -\infty < z < \infty, \end{cases} \quad (4.5)$$

missä parametrit  $\mu, \xi \in \mathbb{R}$  ja  $\sigma > 0$ . Tätä jakaumaa sanotaan *yleistetyksi ääriarvojakaumaksi* (*Generalized Extreme Value Distribution*, GEV). Parametria  $\xi$  sanotaan *ääriarvoindeksiksi*. Jos  $\xi = 0$ , niin yleinen ääriarvojakauma vastaa Gumbelin jakaumaa. Tapaus  $\xi < 0$  vastaa Weibullin ääriarvojakaumaa ja tapaus  $\xi > 0$  vastaa Fréchet'n jakaumaa. Tapaus  $\xi = 0$  voidaan tulkita raja-arvona

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \exp \left\{ -\left[ 1 + \xi \left( \frac{z-\mu}{\sigma} \right) \right]^{-1/\xi} \right\} = \exp \left\{ -\exp \left[ -\left( \frac{z-\mu}{\sigma} \right) \right] \right\}.$$

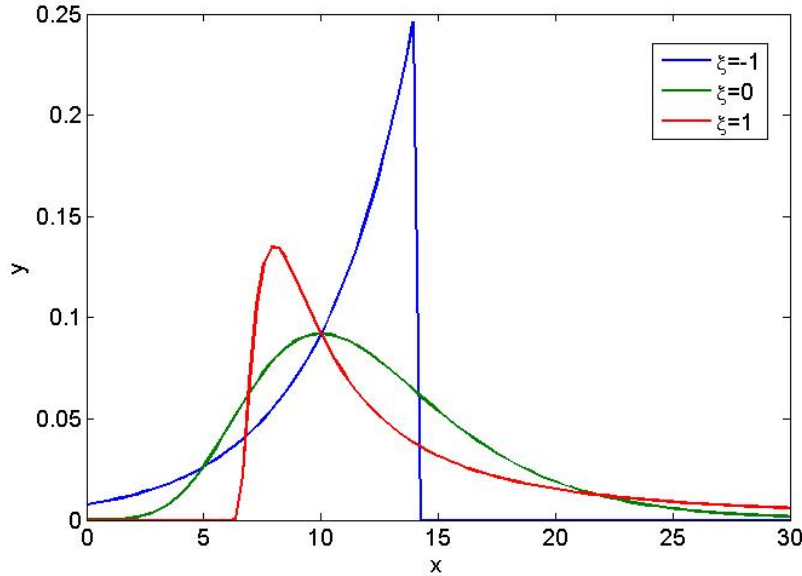
Kuvassa 4.1 on yleisen ääriarvojakauman tiheysfunktion kuvaaja eri parametrin  $\xi$  arvoilla.

Maksimiarvojakauman tyyppi riippuu satunnaismuuttujien  $X_1, \dots, X_n$  jakaumasta  $F$ . Seuraavan lauseen avulla voidaan tietyille jakaumille  $F$  selvittää mihin tyyppiin maksimin jakauma kuuluu.

**Lause 4.1.1.** *Olko  $f$  jakauman tiheysfunktio ja  $x^* = \sup\{x \mid F(x) < 1\}$  kertymäfunktion  $F$  oikea loppupiste, joka voi olla ääretön.*

(i) *Jakauman  $F$  ääriarvojakauma on tyyppiä I ( $\xi = 0$ ), jos derivaatta  $f'$  on olemassa,  $x^* = \infty$  ja*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \frac{1 - F(t)}{f(t)} = 0$$



Kuva 4.1: Yleisen ääriarvojakauman tiheysfunktion kuvaaja eri parametrin  $\xi$  arvoilla.

(ii) Jakauman  $F$  ääriarvojakauma on tyyppiä II ( $\xi > 0$ ), jos  $x^* = \infty$  ja

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{tf(t)}{1 - F(t)} = \frac{1}{\xi}$$

jollekin positiiville luvulle  $\xi$ .

(iii) Jakauman  $F$  ääriarvojakauma on tyyppiä III ( $\xi < 0$ ), jos  $x^* < \infty$  ja

$$\lim_{t \rightarrow -x^*} \frac{(x^* - t)f(t)}{1 - F(t)} = -\frac{1}{\xi}$$

jollekin negatiiviselle luvulle  $\xi$ .

Lauseen 4.1.1 ehtoja sanotaan *Von Misenin ehdoiksi*. Lauseen 4.1.1 ehdon (i) toteuttavia jakaumia ovat esimerkiksi normaalijakauma, lognormaalijakauma, gammajakauma ja eksponenttijakauma. Tyypin II ääriarvojakaumaan johtavia jakaumia ovat esimerkiksi käänteinen gammajakauma ja loggamma jakauma. Tyypin III ääriarvojakaumaan johtavat jakaumat, joilla on äärellinen oikea loppupiste. Tällaisia jakaumia ovat esimerkiksi tasajakauma ja betajakauma. [17, 3] Suppenemiselle voidaan antaa myös vahvemmat ehdot, jotka ovat välttämättömät ja riittävät jakauman  $F$  suppenemiselle kohti jotain kolmesta ääriarvojakaumatyypistä [10, s. 19].

Gumbelin jakaumalle odotusarvo ja varianssi ovat aina olemassa. Suoraan laske-  
malla saadaan niille yhtälöt

$$E(X) = \mu + \sigma\gamma, \quad \text{ja} \quad \text{Var}(X) = \sigma^2 \frac{\pi^2}{6},$$

missä  $\gamma = 0.577215665 \dots$  on *Eulerin vakio*. Fréchet'n jakaumalle odotusarvo on

$$E(X) = \mu + \sigma \Gamma \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right), \quad \alpha > 1$$

ja varianssi

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 \left[ \Gamma \left( 1 - \frac{2}{\alpha} \right) - \Gamma \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right)^2 \right], \quad \alpha > 2.$$

Fréchet'n jakaumalla siis odotusarvo ja varianssi eivät ole olemassa kaikilla parametrin  $\alpha$  arvoilla. Tyypin III ääriarvojakauman odotusarvo on

$$E(X) = \mu - \sigma \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right)$$

ja varianssi

$$\text{Var}(X) = \sigma^2 \left[ \Gamma \left( 1 + \frac{2}{\alpha} \right) - \Gamma \left( 1 + \frac{1}{\alpha} \right)^2 \right].$$

Yleisen ääriarvojakauman odotusarvo on

$$E(X) = \begin{cases} \mu + \sigma \frac{\Gamma(1-\xi)-1}{\xi}, & \xi \neq 0, \xi < 1 \\ \mu + \sigma\gamma, & \xi = 0 \end{cases}$$

ja varianssi

$$\text{Var}(X) = \begin{cases} \sigma^2 \frac{\Gamma(1-2\xi)-\Gamma(1-\xi)^2}{\xi^2}, & \xi \neq 0, \xi < 1/2 \\ \sigma^2 \frac{\pi^2}{6}, & \xi = 0. \end{cases}$$

Ääriarvojakaumat esitetään usein standardimuodossa, jolloin lokaatioparametriksi asetetaan  $\mu = 0$  ja skaalaparametriksi  $\sigma = 1$ .

$$\begin{aligned} \text{I: } G_0(z) &= \exp[-\exp(-z)], & -\infty < z < \infty \\ \text{II: } G_0(z) &= \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ \exp(-z^{-\alpha}), & z > 0 \end{cases} \\ \text{III: } G_0(z) &= \begin{cases} \exp[(-z)^\alpha], & z < 0 \\ 1, & z \geq 0 \end{cases} \\ \text{GEV: } G_0(z) &= \exp\left[-(1+\xi z)^{-1/\xi}\right], & 1+\xi z > 0. \end{aligned}$$

Yleiset tapaukset saadaan kun tarkastellaan satunnaismuuttujaa  $Y = \mu + \sigma X$ , missä satunnaismuuttuja  $X$  noudattaa jotain standardijakaumaa  $G_0$ . Tällöin satunnaismuuttujan  $Y$  jakauma on  $G$ .



muuttujan  $Y$  jakauman kertymäfunktio  $G$  on

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y \leq y) = P(\mu + \sigma X \leq y) = P\left(X \leq \frac{y - \mu}{\sigma}\right) \\ &= G_0\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right). \end{aligned}$$

### Paluutaso

Tarkastellaan tilannetta, missä satunnaismuuttuja  $X$  kuvaa jonkin tietyn ajanjakson maksimeja, esimerkiksi vuosittaisia maksimeja. *Paluutaso*  $x_T$  määritellään siten, että ajanjakson  $T$  aikana arvo  $x_T$  ylitetään keskimäärin kerran [23, s. 12]. Jos  $T$  on kokonaisluku, niin paluutaso  $x_T$  voidaan johtaa seuraavasti. Tarkastellaan satunnaismuuttujia  $X_1, \dots, X_T$ . Määritellään satunnaismuuttuja  $S$  siten, että  $S$  on  $T$  vuoden aikana tapahtuneiden ylitysten määrä. Siis  $S$  on diskreetti satunnaismuuttuja, joka noudattaa binomijakaumaa parametrein  $n = T$  ja  $p = 1 - F(x_T)$ . Tällöin paluutaso  $x_T$  on yhtälön

$$E(S) = T [1 - F(x_T)] = 1$$

ratkaisu. Paluutasolle  $x_T$  saadaan siis yhtälö

$$x_T = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{T}\right), \quad (4.6)$$

missä  $F^{\leftarrow}$  on satunnaismuuttujien  $X_i$  jakauman kvantiilifunktio. Lisäksi todennäköisyys, että satunnaismuuttuja  $X$  ylittää arvon  $x_T$  on

$$P(X > x_T) = 1 - F(x_T) = \frac{1}{T}.$$

Satunnaismuuttuja  $X$  ylittää siis arvon  $x_T$  yhden ajanjakson aikana todennäköisyydellä  $1/T$ . Suuretta  $T$  sanotaan *paluujaksoksi*.

Jos satunnaismuuttujat  $X_i$  ovat suurimpia arvoja jossain tietyssä alassa tai tilavuudessa  $S_0$ , niin paluutaso  $x_T$  voidaan tulkita siten, että kun tutkitaan ala  $T \times S_0$ , niin arvo  $x_T$  ylitetään keskimäärin kerran. Arvoa  $x_T$  sanotaan myös koon *karakteristiseksi arvoksi* alalla  $T \times S_0$ . Karakteristista kokoa käytetään usein teräksistä löytyvien sulkeumien yhteydessä kuvaamaan joltain tietyltä alalta (tai tilavuudesta) löytyvän tyypillisen sulkeuman kokoa.

## 4.2 Parametrien estimointi

Esitellään tässä kappaleessa työssä käytetyt estimaattorit Gumbelin jakaumalle, Fréchet'n jakaumalle ja yleiselle ääriarvojakaumalle. Tämän työn kannalta tärkeissä sovelluksissa tyypin III ääriarvojakauma on harvoin käytetty, joten jätetään se

tarkastelun ulkopuolelle.

### 4.2.1 Momenttimenetelmä

#### Gumbel

Momenttimenetelmän mukaiseksi yhtälöryhmäksi saadaan

$$\begin{aligned}\mu + \sigma\gamma &= \bar{X}, \\ \frac{\pi^2}{6}\sigma^2 &= S^2,\end{aligned}$$

missä  $\bar{X}$  on otoksen keskiarvo ja  $S^2$  otoksen varianssi. Ratkaisemalla tästä  $\mu$  ja  $\sigma^2$  saadaan

$$\begin{aligned}\mu &= \bar{X} - \sigma\gamma, \\ \sigma^2 &= \frac{6}{\pi^2}S^2.\end{aligned}$$

Siis momenttiestimaattorit voidaan kirjoittaa muodossa

$$\hat{\mu} = \bar{X} - \gamma \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sqrt{S^2} \quad (4.7)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{\sqrt{6}}{\pi} \sqrt{S^2}. \quad (4.8)$$

#### Fréchet

Momenttimenetelmän mukainen yhtälöryhmä on

$$\begin{aligned}\bar{X} &= \sigma \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \\ S^2 &= \sigma^2 \left[ \Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \right],\end{aligned}$$

missä  $\bar{X}$  on otoksen keskiarvo ja  $S^2$  otoksen varianssi. Yhtälöryhmä saadaan muotoon

$$\sigma = \frac{\bar{X}}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)} \quad (4.9)$$

$$\frac{S^2}{\bar{X}^2} = \frac{\left[ \Gamma\left(1 - \frac{2}{\alpha}\right) - \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2 \right]}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)^2}. \quad (4.10)$$

Momenttimenetelmän mukaiset estimaatit saadaan siis ratkaisemalla ensin  $\alpha$  numeerisesti yhtälöstä (4.10). Tämän jälkeen  $\sigma$  voidaan laskea yhtälöstä (4.9).

### 4.2.2 Todennäköisyyksillä painotettujen momenttien menetelmä

Todennäköisyyksillä painotettujen momenttien menetelmä on erityisesti hydrologisissa sovelluksissa käytetty estimointimenetelmä ääriarvojakaumille. Menetelmän idea on vastaava kuin momenttimenetelmässä, mutta keskusmomenttien sijaan käytetään *todennäköisyyksillä painotettuja momenteja* (*Probability Weighted Moments*, PWM) [3, s. 133]

$$E \{X^p F(X)^r [1 - F(X)]^s\}, \quad p, r, s \in \mathbb{R}. \quad (4.11)$$

Tyypillisiä valintoja parametreille ovat  $p = 1$ ,  $s = 0$  ja  $r = 0, 1, 2, \dots$ , tai  $p = 1$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$  ja  $r = 0$ . Tällöin todennäköisyyksillä painotetut momentit ovat muotoa

$$\beta_r = E[XF(X)^r], \quad r = 0, 1, 2, \dots \quad (4.12)$$

tai muotoa

$$\beta_s^* = E[X(1 - F(X))^s], \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (4.13)$$

Yhtälöä (4.12) vastaavat otokseen  $X_1, \dots, X_n$  perustuvat momentit ovat [9]

$$\hat{\beta}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_j \hat{F}(X_j)^r, \quad r = 0, 1, 2, \dots,$$

missä  $\hat{F}$  on jakauman empiirinen kertymäfunktio. Vastaavasti yhtälöä (4.13) vastaavat otokseen perustuvat momentit ovat

$$\hat{\beta}_s^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_j (1 - \hat{F}(X_j))^s, \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Olkoon  $\theta_1, \dots, \theta_k$  jakauman tuntemattomat parametrit. Yhtälön (4.12) määrittelemät momentit ovat jakauman parametrien funktioita, joten vastaavasti kuin momenttimenetelmälle, PWM-estimaatit parametreille saadaan ratkaisemalla ne yhtälöryhmästä

$$\hat{\beta}_i = \beta_i(\theta_1, \dots, \theta_k), \quad i = 0, 1, \dots, k-1.$$

Menetelmää käytettäessä on huomattava, että tulokset riippuvat myös momentille  $\beta_r$  käytetystä estimaatista  $\hat{\beta}_r$ . Järjestettyyn otokseen  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  perustuvia mahdollisia estimaatteja ovat [11]

$$\hat{\beta}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(i-1) \cdots (i-r)}{(n-1)(n-r)} x_{(i)}$$

tai

$$\hat{\beta}_r = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i^r x_{(i)},$$

missä  $p_i$  voidaan valita yhtälöllä

$$p_i = \frac{i - a}{n}, \quad 0 < a < 1$$

tai yhtälöllä

$$p_i = \frac{j - a}{n + 1 - 2a}, \quad -\frac{1}{2} < a < \frac{1}{2}.$$

### Gumbel

Lasketaan Gumbelin jakaumalle odotusarvo [22]

$$E(XF(X)^r) = \frac{1}{r+1} [\mu + (\gamma + \ln(r+1))\sigma], \quad r > -1,$$

missä  $\gamma$  on Eulerin vakio. Jos valitaan  $r = 0$  ja  $r = 1$ , niin PWM-estimaattorit saadaan yhtälöryhmästä

$$\begin{aligned} \mu + \gamma\sigma &= \hat{\beta}_0, \\ \frac{1}{2} [\mu + (\gamma + \ln(2))\sigma] &= \hat{\beta}_1. \end{aligned}$$

Ratkaisemalla yhtälöryhmä saadaan PWM-estimaattoreiksi

$$\hat{\mu} = \hat{\beta}_0 - \gamma\hat{\sigma}, \quad (4.14)$$

$$\hat{\sigma} = \frac{2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0}{\ln 2}. \quad (4.15)$$

### Fréchet

Fréchet-jakaumalle todennäköisyyksillä painotetuksi momenteiksi saadaan

$$E(XF(X)^r) = \sigma \frac{\Gamma(1 - 1/\alpha)}{(r+1)^{1-1/\alpha}}.$$

Valitsemalla  $r = 0$  ja  $r = 1$  saadaan

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_0 &= \sigma \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right), \\ \hat{\beta}_1 &= \frac{\sigma}{2^{1-1/\alpha}} \Gamma\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right). \end{aligned}$$

Siispä PWM-estimaattorit ovat

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{\beta}_0}{\Gamma\left(1 - \frac{1}{\hat{\alpha}}\right)}, \quad (4.16)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\ln 2}{\ln 2 - \ln \hat{\beta}_0 + \ln \hat{\beta}_1}. \quad (4.17)$$

## GEV

Esitys perustuu lähteeseen [3, s. 133]. Yleiselle ääriarvojakaumalle saadaan todennäköisyyksillä painotetuiksi momenteiksi

$$\beta_r = E[XF(X)^r] = \frac{1}{r+1} \left\{ \mu - \frac{\sigma}{\xi} [1 - (r+1)^\xi \Gamma(1-\xi)] \right\}, \quad \xi < 1.$$

Nyt PWM-menetelmän mukaiseksi yhtälöryhmäksi saadaan

$$\hat{\beta}_0 = \mu - \frac{\sigma}{\xi} (1 - \Gamma(1-\xi)), \quad (4.18)$$

$$2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0 = \frac{\sigma}{\xi} \Gamma(1-\xi)(2^\xi - 1), \quad (4.19)$$

$$\frac{3\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_0}{2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0} = \frac{3^\xi - 1}{2^\xi - 1}. \quad (4.20)$$

PWM-estimaatit saadaan nyt ratkaisemalla ensin  $\hat{\xi}$  numeerisesti yhtälöstä

$$\frac{3\hat{\beta}_2 - \hat{\beta}_0}{2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0} = \frac{3^\xi - 1}{2^\xi - 1}.$$

Tämän jälkeen  $\hat{\sigma}$  saadaan yhtälöstä

$$\hat{\sigma} = \frac{\hat{\xi}(2\hat{\beta}_1 - \hat{\beta}_0)}{\Gamma(1-\hat{\xi})(2^{\hat{\xi}} - 1)}. \quad (4.21)$$

Lopuksi  $\hat{\mu}$  voidaan laskea yhtälöllä

$$\hat{\mu} = \hat{\beta}_0 + \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} (1 - \Gamma(1-\hat{\xi})). \quad (4.22)$$

### 4.2.3 Pienimmän neliösumman menetelmä

Esitellään Gumbelin ja Fréchet'n jakaumalle estimointimenetelmä, joka perustuu jakauman *kvantiileihin*  $x_P$ , jotka määritellään kertymäfunktion  $F$  avulla yhtälöllä

$$x_P = \inf\{x \mid F(x) \geq P\}.$$

Jos kertymäfunktio  $F$  on bijektiivinen, niin kvantiilit saadaan kertymäfunktion käänteisfunktion  $F^{-1}$  avulla yhtälöstä  $x_P = F^{-1}(P)$ . Gumbelin jakaumalle kvantiili  $x_P$  saadaan nyt yhtälöllä

$$x_P = \mu - \sigma \ln(-\ln(P)) = \mu + \sigma y, \quad (4.23)$$

missä muuttujaa  $y = -\ln(-\ln(P))$  sanotaan *reduoiduksi muuttujaksi*. Vastaavasti Fréchet'n jakauman kvantiilille  $x_P$  saadaan yhtälö

$$x_P = \sigma e^{-\ln(-\ln(P))/\alpha} = \sigma e^{y/\alpha}. \quad (4.24)$$

Ottamalla yhtälöstä (4.24) puolittain luonnollinen logaritmi saadaan yhtälö

$$\ln x_P = \ln \sigma + \frac{1}{\alpha} y. \quad (4.25)$$

Yhtälöistä (4.23) ja (4.25) havaitaan, että Gumbelin jakaumalle pisteiden  $(-\ln(-\ln(P)), x_P)$  ja Fréchet'n jakaumalle pisteiden  $(-\ln(-\ln(P)), \ln x_P)$  välillä on lineaarinen riippuvuus. Tästä saadaan menetelmä jakauman parametrien estimointiin.

Olkoon  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  järjestetty realisoitunut otos. Gumbelin jakaumalle parametrien  $\mu$  ja  $\sigma$  estimaatit saadaan sovittamalla suora  $z = ay + b$  pisteisiin  $(y_i, z_i) = (-\ln(-\ln(P_i)), x_{(i)})$ , missä  $P_i$  kuvaa kertymäfunktion arvoa pisteessä  $x_{(i)}$  ja sen arvot saadaan yhtälöllä

$$P_i = \frac{i}{n+1}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (4.26)$$

Tuloksena saadaan estimaatit  $\hat{a}$  ja  $\hat{b}$  suoran parametreille. Gumbelin jakauman parametriestimaatit ovat nyt  $\hat{\mu} = \hat{b}$  ja  $\hat{\sigma} = \hat{a}$ . Fréchet'n jakaumalle sovitetaan vastaavasti suora  $z = ay + b$  pisteisiin  $(y_i, z_i) = (-\ln(-\ln(P_i)), x_{(i)})$ , missä  $P_i$  on määritelty yhtälöllä (4.26). Fréchet'n jakauman parametriestimaatit saadaan nyt suoran parametriestimaateista yhtälöillä  $\hat{\sigma} = \exp(\hat{b})$  ja  $\hat{\alpha} = 1/\hat{a}$ .

#### 4.2.4 Suurimman uskottavuuden menetelmä

Suurimman uskottavuuden menetelmä on yleisesti käytetty estimointimenetelmä ääriarvojakaumien parametreille. Loguskottavuusfunktio Gumbelin jakaumalle on

$$l(\mu, \sigma | x_1, \dots, x_n) = -n \ln \sigma - \sum_{i=1}^n \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) - \sum_{i=1}^n \exp \left[ - \left( \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \right]. \quad (4.27)$$

Fréchet'n jakauman loguskottavuusfunktio on

$$l(\sigma, \alpha | x_1, \dots, x_n) = n \ln \alpha + n \alpha \ln \sigma - (\alpha + 1) \sum_{i=1}^n \ln x_i - \sigma^\alpha \sum_{i=1}^n x_i^{-\alpha}. \quad (4.28)$$

Kun parametri  $\xi \neq 0$ , niin yleisen ääriarvojakauman loguskottavuusfunktio on

$$\begin{aligned} l(\mu, \sigma, \xi | x_1, \dots, x_n) = & -n \ln \sigma - \left( \frac{1}{\xi} + 1 \right) \sum_{i=1}^n \ln \left( 1 + \xi \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right) \\ & - \sum_{i=1}^n \left( 1 + \xi \frac{x_i - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Jos parametri  $\xi = 0$ , niin loguskottavuusfunktio redusoituu samaksi kuin Gumbelin jakaumalla. Yhtälöiden (4.27), (4.28) ja (4.29) maksimeille ei voida antaa analyytistä ratkaisua, vaan ne on ratkaistava numeerisesti. Alkuarvoina iteratiivissa menetelmissä voidaan käyttää esimerkiksi momenttimenetelmän tai todennäköisyyksillä painotetun momenttimenetelmän antamia parametriestimaatteja.

Kahden parametrin Fréchet'n jakaumalle suurimman uskottavuuden estimaatit saadaan Gumbelin jakauman avulla. Jos satunnaismuuttujalla  $X$  on Fréchet'n jakauma parametrein  $\sigma$  ja  $\alpha$ , niin satunnaismuuttujalla  $\ln X$  on Gumbelin jakauma parametrein  $\mu^* = \ln \sigma$  ja  $\sigma^* = 1/\alpha$ . Näin ollen Fréchet'n jakaumalle suurimman uskottavuuden estimaatit saadaan sovittamalla otokseen  $\ln X_1, \dots, \ln X_n$  Gumbelin jakauma, jolle saadaan parametriestimaatit  $\hat{\mu}^*$  ja  $\hat{\sigma}^*$ . Tämän jälkeen Fréchet'n jakauman parametriestimaatit saadaan yhtälöistä

$$\hat{\sigma} = \exp(\hat{\mu}^*) \quad \text{ja} \quad \hat{\alpha} = \frac{1}{\hat{\sigma}^*}.$$

Approksimaatiot parametriestimaattoreiden varianssille saadaan käyttämällä suurimman uskottavuuden estimaattoreiden asymptootista normaaliutta. Gumbelin jakauman tapauksessa suurimman uskottavuuden estimaattorille  $\hat{\boldsymbol{\theta}} = [\hat{\mu}, \hat{\sigma}]^T$  on voimassa

$$\sqrt{n}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \xrightarrow{D} W \sim N_2(\mathbf{0}, I^{-1}(\boldsymbol{\theta})),$$

missä matriisi  $I(\boldsymbol{\theta})$  on Gumbelin jakauman Fisherin informaatiomatriisi

$$I(\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{bmatrix} 1 & \gamma - 1 \\ \gamma - 1 & \frac{\pi^2}{6} + (1 - \gamma)^2 \end{bmatrix}.$$

Matriisissa esiintyvä vakio  $\gamma$  on Eulerin vakio. Jos otoksen koko on  $n$ , niin estimaat-

torin varianssimatriisille  $V$  saadaan nyt approksimaatio

$$V \approx \frac{1}{n} I^{-1}(\mu, \sigma),$$

jonka arvo lasketaan saadussa suurimman uskottavuuden estimaatissa. Approksimaatiot parametrien  $\mu$  ja  $\sigma$  estimaattoreiden varianssille saadaan nyt ottamalla matriisista  $V$  vastaava diagonaalialkio. Luottamusvälit parametriestimaateille saadaan laskemalla arvot

$$\hat{\mu} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{V_{11}} \quad \text{ja} \quad \hat{\sigma} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{V_{22}},$$

missä  $z_{\alpha/2}$  on normaalijakauman  $1 - \alpha/2$  kvantiili. Saadut approksimaatiot perustuvat suurimman uskottavuuden estimaattorin asymptoottisiin ominaisuuksiin, ja sen vuoksi niitä pitäisikin käyttää vain, kun otoksen koko  $n$  on suuri.

Fréchet'n jakaumalle ja yleiselle ääriarvojakaumalle voidaan menetellä vastaavasti, kun matriisi  $I(\mu, \sigma)$  korvataan vastaavalla jakauman Fisherin informaatiomatriisilla. Fisherin informaatiomatriisi Fréchet'n jakaumalle on

$$I(\sigma, \alpha) = \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2}{\sigma^2} & \frac{1}{\sigma}(1 - \gamma) \\ \frac{1}{\sigma}(1 - \gamma) & \frac{1}{\alpha^2} \left[ (\gamma - 1)^2 + \frac{\pi^2}{6} \right] \end{bmatrix},$$

missä  $\gamma$  on Eulerin vakio. Yleiselle ääriarvojakaumalle Fisherin informaatiomatriisi on [3, s. 169]

$$I(\sigma, \xi, \mu) = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{12} & I_{22} & I_{23} \\ I_{13} & I_{23} & I_{33} \end{bmatrix},$$

missä

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{\sigma^2 \xi^2} (1 - 2\Gamma(2 + \xi) + p), \\ I_{12} &= -\frac{1}{\sigma \xi^2} \left( 1 - \gamma - q + \frac{1 - \Gamma(2 + \xi)}{\xi} + \frac{p}{\xi} \right), \\ I_{13} &= -\frac{1}{\sigma^2 \xi} (p - \Gamma(2 + \xi)), \\ I_{22} &= \frac{1}{\xi^2} \left[ \frac{\pi^2}{6} + \left( 1 - \gamma + \frac{1}{\xi} \right)^2 - \frac{2q}{\xi} + \frac{p}{\xi} \right], \\ I_{23} &= -\frac{1}{\sigma \xi} \left( q - \frac{p}{\xi} \right), \\ I_{33} &= \frac{p}{\sigma^2}, \end{aligned}$$



$\gamma$  on Eulerin vakio, ja arvot  $p$  ja  $q$  saadaan yhtälöistä

$$\begin{aligned} p &= (1 + \xi)^2 \Gamma(1 + 2\xi), \\ q &= \Gamma(2 + \xi) \left( \phi(1 + \xi) + \frac{1 + \xi}{\xi} \right). \end{aligned}$$

Yleiselle ääriarvojakaumalle suurimman uskottavuuden estimaattorin asymptoottiset ominaisuudet ovat voimassa kun  $\xi > -0.5$  [3, s. 133], [8, s. 55].

## 5. SOVELLUKSIA TERÄKSEN VÄSYMISANALYYSIIN

Sulkeumiksi sanotaan teräksestä löytyviä mikroskooppisia partikkeleita ja epäpuhtauksia. On osoitettu, että väsymismurtumat ydintyvät usein teräksestä löytyvistä suurista epämetallisista sulkeumista [20]. Tämän vuoksi teräksestä löytyvät suurimmat sulkeumat ovat tärkeä indikaattori sen laadusta.

Teräksestä löytyviä sulkeumia voidaan määrittää teräksestä leikatulta kiillotetulta pinnalta, hieeltä. Hiepinta jaetaan tyypillisesti useisiin samankokoisiin alueisiin. Yhden alueen pinta-alaa sanotaan *kontrollialaksi*. Kukin alue analysoidaan ja löytyvät sulkeumat kirjataan ylös. Otos suurimpia sulkeumia tietyllä kontrollialalla saadaan ottamalla jokaiselta alueelta suurin sulkeuma. Sulkeumien kokona käytetään tyypillisesti projektiopinta-alan neliöjuurta.

Hurme [12] tutki diplomityössään hiepinnalta määritettyjen sulkeumien kokoja-kaumia. Eräs havainto oli, että sulkeumien kokojakauma vaihteli eri alueiden välillä. Yhdeksi mahdolliseksi syyksi tunnistettiin sulkeumien hyvin erilaiset kemialliset koostumukset. Luokittelu alkuaineiden mukaan paransikin tulosta. Huolimatta siitä, että sulkeumien kokojakaumat vaihtelivat, sopivat eri alueilta määritetyt suurimmat sulkeumat hyvin maksimiarvojakaumiin. [12]

Oletetaan, että kontrollialalta  $A_0$  on määritetty suurimpien sulkeumien jakauma. Saatu jakauma voidaan muuntaa vastaamaan alalta  $A$  löytyviä suurimpia sulkeumia yhtälöllä [5]

$$F_A(x) = F_{A_0}^{A/A_0}(x), \quad (5.1)$$

missä  $F_{A_0}$  on suurimpien sulkeumien jakauma kontrollialalla  $A_0$ . Merkitään pintaalojen suhdetta  $A/A_0 = n$ . Tarkastellaan seuraavaksi maksimiarvojakaumien käyttäytymistä ekstrapoloinnissa suurempaan alaan (tai tilavuuteen). Jos  $F_{A_0}$  on Gumbelin jakauma parametrein  $\mu$  ja  $\sigma$ , niin

$$\begin{aligned} F_A(x) &= \exp\left(-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right)^n \\ &= \exp\left(-ne^{-\frac{x-\mu}{\sigma}}\right) \\ &= \exp\left(-e^{-\frac{x-\mu}{\sigma} + \ln n}\right) \\ &= \exp\left(-e^{-\frac{x-\mu-\sigma \ln n}{\sigma}}\right) \end{aligned}$$

Siis alalta  $A$  löytyvät maksimisulkeumat noudattavat Gumbelin jakaumaa parametrein  $\mu^* = \mu + \sigma \ln n$  ja  $\sigma^* = \sigma$ . Vastaavasti, jos  $F_{A_0}$  on Fréchet'n jakauma, niin jakaumaksi  $F_A$  saadaan

$$\begin{aligned} F_A(x) &= \exp \left( - \left( \frac{x}{\sigma} \right)^{-\alpha} \right)^n \\ &= \exp \left( -n \left( \frac{x}{\sigma} \right)^{-\alpha} \right) \\ &= \exp \left( - \left( \frac{x}{\sigma n^{1/\alpha}} \right)^{-\alpha} \right). \end{aligned}$$

Siis alalta  $A$  löytyvät maksimisulkeumat noudattavat Fréchet'n jakaumaa parametrein  $\sigma^* = \sigma n^{-1/\alpha}$  ja  $\alpha^* = \alpha$ . Yleisen ääriarvojakauman tapauksessa saadaan

$$\begin{aligned} F_A(x) &= \left[ \exp \left( - \left( 1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} \right)^{-1/\xi} \right) \right]^n \\ &= \exp \left[ - \left( n^{-\xi} + \xi \frac{x - \mu}{\sigma n^\xi} \right)^{-1/\xi} \right] \\ &= \exp \left[ - \left( 1 + \xi \frac{x - \mu - (\sigma/\xi)(n^\xi - 1)}{\sigma n^\xi} \right)^{-1/\xi} \right]. \end{aligned}$$

Siis alalta  $A$  löytyvät maksimisulkeumat noudattavat yleistä ääriarvojakaumaa parametrein  $\xi^* = \xi$ ,  $\sigma^* = \sigma n^\xi$  ja  $\mu^* = \mu + (\sigma/\xi)(n^\xi - 1)$ . Tästä nähdään, että maksimi-arvojakaumille jakauman parametrit muuttuvat, mutta jakaumatyyppi säilyy samana ekstrapoloinnissa.

Tarkastellaan vielä, miten jakauman odotusarvo ja hajonta muuttuvat ekstrapoloinnissa. Sulkeumien yhteydessä puhutaan usein myös jakauman *suhteellisesta hajonnasta* tai *variaatiokertoimesta*, joka määritellään jakauman hajonnan  $s$  ja odotusarvon  $m$  suhteeksi  $s/m$ . Siirryttäessä suurempaan alaan  $A$  nähdään, että Gumbelin jakaumalle uusi odotusarvo on

$$m_A = \mu^* + \sigma^* \gamma = \mu + \sigma \gamma + \sigma \ln n = m_{A_0} + \sigma \ln n.$$

Koska  $\sigma^* = \sigma$ , niin hajonta pysyy samana. Uudeksi suhteelliseksi hajonnaksi saadaan

$$\frac{s_A}{m_A} = \frac{s_{A_0}}{m_{A_0} + \sigma \ln n}.$$

Suhteellinen hajonta ei siis säily Gumbelin jakaumalle samana. Fréchet'n jakaumalle

uusi odotusarvo on

$$\begin{aligned} m_A &= \sigma^* \Gamma \left( 1 - \frac{1}{\alpha^*} \right) \\ &= n^{-1/\alpha} \sigma \Gamma \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right) \\ &= n^{-1/\alpha} m_{A_0} \end{aligned}$$

ja uusi hajonta on

$$\begin{aligned} s_A &= \sigma^* \sqrt{\Gamma \left( 1 - \frac{2}{\alpha^*} \right) - \Gamma \left( 1 - \frac{1}{\alpha^*} \right)^2} \\ &= n^{-1/\alpha} \sigma \sqrt{\Gamma \left( 1 - \frac{2}{\alpha} \right) - \Gamma \left( 1 - \frac{1}{\alpha} \right)^2} \\ &= n^{-1/\alpha} s_{A_0}. \end{aligned}$$

Suhteellinen hajonta on

$$\frac{s_A}{m_A} = \frac{n^{-1/\alpha} s_{A_0}}{n^{-1/\alpha} m_{A_0}} = \frac{s_{A_0}}{m_{A_0}}.$$

Suhteellinen hajonta säilyy siis Fréchet'n jakaumalle samana. Yleiselle ääriarvojakau-  
kaumalle uusi odotusarvo on

$$m_A = \mu + n^\xi (m_{A_0} - \mu).$$

Uusi hajonta on

$$s_A = n^\xi s_{A_0}.$$

Suhteellinen hajonta on siis

$$\frac{s_A}{m_A} = \frac{n^\xi s_{A_0}}{\mu + n^\xi (m_{A_0} - \mu)}.$$

Yleisessä tapauksessa suhteellinen hajonta ei säily samana, mutta jos lokaatiopara-  
metri  $\mu = 0$ , niin suhteellinen hajonta säilyy.

Beretta & Murakami havaitsivat, että vaikka kahdelta eri suuruiselta kontrollia-  
lalta määritetyt suurimmat sulkeumat noudattavat Gumbelin jakaumaa, niin yhtälö  
(5.1) ei aina ole voimassa [5]. Tämä voi johtua siitä, että pienemmältä alueelta mää-  
ritetyt suurimmat sulkeumat ovat eri tyyppiä kuin suuremmalta alueelta määritetyt.  
Tässä tapauksessa mallina voidaan käyttää sekajakaumaa, joka ottaa huomioon eri  
tyyppiset sulkeumat. Mallin kertymäfunktio on tällöin

$$F_{\text{mix}}(x) = (1 - P)F_1(x | \mu_1, \sigma_1) + PF_2(x | \mu_2, \sigma_2),$$

missä  $P$  on tyypin 2 sulkeumien esiintymistodennäköisyys,  $F_1$  tyypin 1 sulkeumien maksimiarvojakauman kertymäfunktio,  $F_2$  tyypin 2 sulkeumien maksimiarvojakauman kertymäfunktio ja maksimiarvojakaumana käytetään Gumbelin jakaumaa [5, 4].

Suurimpien sulkeumien jakaumaa teräksessä voidaan tutkia myös suorittamalla väsytykskoikeita. Väsytykskoikeessa teräksestä otettua testisauvaa väsytetään erityisesti väsytykskoneessa kunnes se murtuu. Usein murtuma ydintyy testisauvassa olevasta suuresta sulkeumasta. Jos oletetaan, että murtuman aiheuttanut sulkeuma on myös suurin sulkeuma testisauvassa, niin tekemällä useita väsytykskoikeita saadaan otos suurimpia sulkeumia. On huomattava, että todellisuudessa murtuman aiheuttava sulkeuma ei välttämättä ole suurin sulkeuma testisauvassa. Sulkeumien vaarallisuuteen vaikuttavat koon lisäksi esimerkiksi sulkeuman muoto, etäisyys pinnasta ja käytetty väsytyslaji [20].

Suurimpien sulkeumien määrittäminen väsytykskoikeilla on kallista ja aikaa vievää. Tämän vuoksi eräs tärkeä tutkimuskohde on suurimpien sulkeumien jakauman ennustaminen suuressa tilavuudessa, esimerkiksi testisauvassa, hiepinnan sulkeumien avulla. Eräs ongelma on, että hiepinnalta kerätyt sulkeumakoot eivät ole sulkeumien todellisia maksimikokoja. Tämä johtuu siitä, että leikattaessa hietä teräksestä sulkeumat eivät välttämättä leikkaudu suurimman halkaisijan kohdalta.

Kolmiulotteisen koon ennustaminen kaksiulotteisen datan avulla on klassinen ongelma stereologiassa. Kolmiulotteisten kappaleiden kokojakauma voidaan määrittää *Wicksellin muunnoksen* avulla [30]. Wicksellin muunnosta käytettäessä oletetaan, että kolmiulotteiset kappaleet ovat pallomaisia, niiden koot ovat riippumattomia toisistaan sekä sijainnista, ja niiden lukumäärä tietyssä tilavuudessa noudattaa Poissonin jakaumaa. Sulkeumille Wicksellin muunnosta ovat soveltaneet esimerkiksi Anderson & Coles [1], Takahashi & Sibuya [27] ja Joossens [14]. Tässä tapauksessa ääriarvomallina käytetään niin sanottua *kynnysarvomallia*, jossa ääriarvojakauma on yleistetty Pareto jakauma. Yleistetty Pareto jakauma määrittää tietyn kynnysarvon  $\mu$  ylittävien arvojen jakauman. Sen kertymäfunktio on

$$F(x | \sigma, \xi) = 1 - \left(1 + \frac{\xi x}{\sigma}\right)^{-1/\xi}.$$

Ongelmana Wicksellin muunnosta käytettäessä on sen hankala laskettavuus, sekä se, että todellisuudessa sulkeumat tuskin toteuttavat vaadittuja oletuksia. Murakami ehdottaa todellisen koon määrittämiseksi yksinkertaisempaa menetelmää, missä kontrollialalta  $A_0$  määritettyjä suurimpia sulkeumia voidaan pitää suurimpina sulkeumina kontrollitilavuudessa

$$V_0 = A_0 \times h_0,$$

missä  $h_0$  on kontrollialalta  $A_0$  määritettyjen suurimpien sulkeumien keskimääräinen

koko. Simulointikokeissa havaittiin, että näin määritelty maksimikoko eroaa todellisesta maksimikoosta alle 10% . [20, ss. 118-122]

## 6. AINEISTON KÄSITTELY

### 6.1 Väsytykokeet

Tässä työssä tarkastellaan kahden eri laakeriteräksen väsytykoe- ja hiepinta-aineistoja. Käytetään eri laakeriteräksistä merkintöjä laakeriteräs B ja laakeriteräs S. Väsytykokeet tehtiin käyttäen kuvan 6.1 mukaisia testisauvoja. Laakeriteräs S:lle osa sauvoista ohennettiin siten, että niiden suoran osan halkaisija oli 6 mm<sup>2</sup>. Määritellään seuraavaksi väsytystesteihin liittyviä suureita. *Jännitysamplitudi*  $\sigma_a$  määritellään yhtälöllä

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2},$$

missä  $\sigma_{max}$  on maksimijännitys ja  $\sigma_{min}$  minimijännitys. *Keskijännitys*  $\sigma_m$  määritellään yhtälöllä

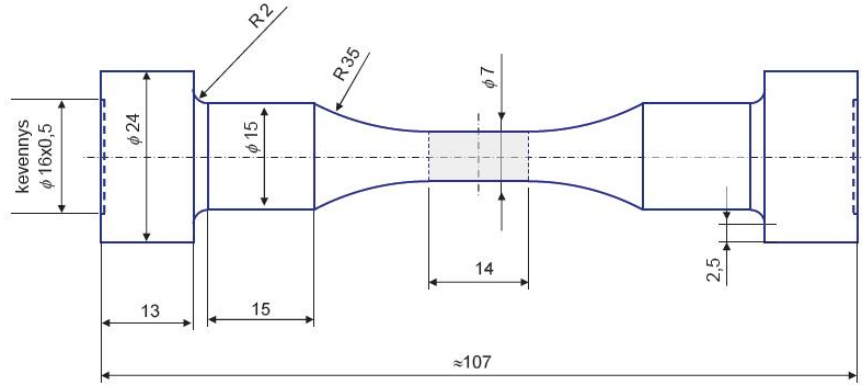
$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2}.$$

*Väsytyssuhde*  $R = \sigma_{min}/\sigma_{max}$  ilmaisee maksimi- ja minimijännityksen suhteen. Tyypillisesti käytettyjä väsytyssuhteita ovat  $R = 0$  ja  $R = -1$ . Testisauvan elinikä  $N$  ilmaistaan sykleinä. Väsytyskoetulokset esitetään tyypillisesti S-N kuvaajassa, missä logaritmisella x-akselilla on testisauvan elinikä sykleissä ja y-akselilla jännitysamplitudi.

Testit suoritettiin käyttäen aksiaaliväsytystä väsytyssuhtein  $R = 0$  ja  $R = -1$ . Testisauvoille kirjattiin käytetty väsytyslaji, elinikä sykleinä, käytetty jännitysamplitudi, murtuman aiheuttaneen sulkeuman koko, sulkeuman etäisyys testisauvan pinnasta, sekä sulkeuman tyyppi. Kuvassa 6.1 on väsytystesteissä käytetyn testisauvan mitat. Laakeriteräs S:lle tehtiin lisäksi väsytykokeita ohennetulla testisauvalla, jonka suoran osan halkaisija oli 6 mm<sup>2</sup>.

Hiepinnan sulkeumat sisältävät kemiallisesti hyvin monen tyyppisiä sulkeumia. Laakeriteräksille murtopinnan sulkeumat olivat enimmäkseen oksideja. Lisäksi 2 sulkeumaa laakeriteräs S:lle ja 7 sulkeumaa laakeriteräs B:lle olivat titaaninitridejä TiN. Jotta hiepinnan ja murtopinnan sulkeumia pystyttäisiin paremmin vertailemaan luokiteltiin hiepinnan sulkeumia lisäksi kemiallisen koostumuksen mukaan oksideihin ja nitrideihin.

Laakeriterästen lisäksi vertaillaan lyhyesti hiepinnan ja murtopinnan sulkeumien jakaumia Roikon diplomityössä [24] käsitellylle teräkselle. Käytetään tälle teräkselle nimeä Teräs A.



Kuva 6.1: Väsytyksessä käytetty testisauva

## 6.2 Maksimiarvojakaumien graafinen esittäminen

Maksimiarvojakaumille käytetään usein graafista esitystapaa, joka perustuu kvantiileihin  $x_P$ . Gumbelin jakauman kvantiili  $x_P$  saadaan yhtälöllä

$$x_P = \mu - \sigma \ln(-\ln(P)) = \mu + \sigma y, \quad (6.1)$$

missä muuttuja  $y = -\ln(-\ln(P))$ . Vastaavasti Fréchet'in jakauman kvantiilille  $x_P$  saadaan yhtälö

$$x_P = \sigma e^{-\ln(-\ln(P))/\alpha} = \sigma e^{y/\alpha}. \quad (6.2)$$

Jos  $\xi \neq 0$  voidaan yleisen ääriarvojakauman kvantiili  $x_P$  esittää yhtälöllä

$$x_P = \mu - \frac{\sigma}{\xi} (1 - \exp(-\xi \ln(-\ln(P)))) = \mu - \frac{\sigma}{\xi} (1 - \exp(\xi y)). \quad (6.3)$$

Jos  $\xi = 0$  on kvantiili  $x_P$  sama kuin Gumbelin jakaumalla.

Jos  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  on kasvavaan järjestykseen järjestetty realisoitunut otos, niin otos esitetään graafisesti piirtämällä pisteet

$$(x_{(i)}, -\ln(-\ln(P_i))), \quad i = 1, \dots, n,$$

missä

$$P_i = \frac{i}{n+1}, \quad i = 1, \dots, n$$

kuvaan kertymäfunktion arvoa pisteessä  $x_{(i)}$ .

Otoksen sopivuutta eri jakaumiin voidaan havainnollistaa piirtämällä kuvaan lisäksi yhtälöiden (6.1), (6.2) ja (6.3) määrittämät kuvaajat, missä parametrien arvot korvataan jollain estimointimenetelmällä saaduilla estimaateilla. Erityisesti yhtälöstä (6.1) nähdään, että Gumbelin jakaumalle kuvaaja on tällöin suora. Ottamalla



yhtälöstä (6.2) puolittain luonnollinen logaritmi saadaan yhtälö

$$\ln x_P = \ln \sigma + \frac{1}{\alpha} y. \quad (6.4)$$

Yhtälöstä (6.4) nähdään, että Fréchet'n jakaumalle kuvaaja on suora kun käytetään logaritmistä  $x$ -akselia.

Jos parametrit on estimoitu suurimman uskottavuuden menetelmällä, saadaan suurimman uskottavuuden estimaattorin asymptoottista normaaliutta ja delta-sääntöä käyttäen luottamusvälit parametriestimaateille. Kvantiilin  $x_P$  suurimman uskottavuuden estimaatit saadaan korvaamalla yhtälöissä (6.1), (6.2) ja (6.3) parametrit niiden suurimman uskottavuuden estimaateilla. Nyt delta-säännön nojalla kvantiilin  $x_P$  suurimman uskottavuuden estimaattorille  $\hat{x}_P$  on voimassa tulos

$$\sqrt{n}(\hat{x}_P - x_P) \xrightarrow{D} N(0, (\nabla x_P)^T I^{-1} (\nabla x_P)),$$

missä matriisi  $I$  on jakauman Fisherin informaatiomatriisi. Tämän tuloksen nojalla  $1 - \alpha$  luottamusväli  $n$  kokoiseen otokseen perustuvalle kvantiiliestimaatille  $\hat{x}_P$  on

$$\hat{x}_P \pm \frac{z_{\alpha/2}}{n} \sqrt{(\nabla x_P)^T I^{-1} (\nabla x_P)}, \quad (6.5)$$

missä  $z_{\alpha/2}$  on normaalijakauman  $1 - \alpha/2$  kvantiili.

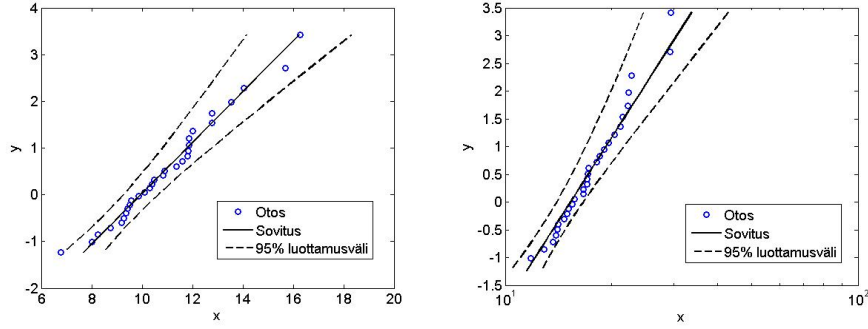
Gumbelin jakauman kvantiilille parametrien suhteen otettu gradientti on  $\nabla x_P = [1, y]^T$ . Sijoittamalla Gumbelin jakauman Fisherin informaatiomatriisi ja gradientti  $\nabla x_P$  yhtälöön (6.5) saadaan luottamusväliksi

$$\hat{x}_P \pm z_{\alpha/2} \frac{\sqrt{6}\sigma}{\sqrt{n\pi}} \sqrt{y^2 + 2(1 - \gamma)y + \frac{\pi^2}{6} + (1 - \gamma)^2},$$

missä  $y = -\ln(-\ln(P))$  on redusoitu muuttuja, ja parametrien arvoiksi sijoitetaan saadut suurimman uskottavuuden estimaatit. Vastaavasti menettelemällä saadaan luottamusvälit myös Fréchet'n jakaumalle ja yleiselle ääriarvojakaumalle. Kuvassa 6.2 on esitetty simuloidut otokset Gumbelin ja Fréchet'n jakaumista edellä kuvatulla menetelmällä, missä jakaumien parametrit estimoitiin suurimman uskottavuuden menetelmällä.

### 6.3 Hiepinnan ja murtopinnan sulkeumien vertailu

Hiepinnan ja murtopinnan sulkeumia voidaan vertailla graafisesti samassa kuvassa käyttämällä yhtälöä (5.1). Jos murtopinnan ja hiepinnan välinen tilavuussuuhde  $n = V/V_0$  tiedetään, niin murtopinnan sulkeumat voidaan muuntaa vastaamaan hiepinnalta kerättyjä sulkeumia yhtälöllä (5.1).



Kuva 6.2: Simuloitu otos maksimisulkeumia (a) Gumbelin jakaumasta ja (b) Fréchet'n jakaumasta, missä parametrit on estimoitu suurimman uskottavuuden menetelmällä

Ongelmana on kuitenkin tilavuussuhteen  $n = V/V_0$  määrittäminen. Koska hieppinnan sulkeumadata on kerätty joltain kontrollialalta  $A_0$ , täytyy se vertailua varten muuntaa kolmiulotteiseksi. Kontrollialalta  $A_0$  määritetyt suurimmat sulkeumat voidaan muuntaa kontrollitilavuudesta  $V_0$  määritetyiksi suurimmiksi sulkeumiksi käyttämällä Murakamin esittämää menetelmää, missä kontrollitilavuus  $V_0$  lasketaan yhtälöllä

$$V_0 = A_0 \times h,$$

missä  $h$  on kontrollialalta  $A_0$  määritettyjen suurimpien sulkeumien keskimääräinen koko.

Murtopinnalta määritettyjä sulkeumia voidaan pitää suurimpina sulkeumina tilavuudesta  $V$ , missä  $V$  on testisauvan suoran osan tilavuus

$$V = \frac{\pi}{4} d^2 l,$$

missä  $d$  on testisauvan suoran osan halkaisija ja  $l$  suoran osan pituus.

## 6.4 Murakami-Endo malli

Esitys perustuu lähteeseen [20]. Murakami-Endo mallin mukainen yhtälö väsymisrajalle  $\sigma_w$  on

$$\sigma_w = \frac{C(HV + 120)}{(\sqrt{A})^{1/6}} \left( \frac{1 - R}{2} \right)^\alpha, \quad (6.6)$$

missä  $C = 1.43$  pintasulkeumille,  $C = 1.41$  pintaan kosketuksissa oleville sulkeumille ja  $C = 1.56$  sisäsulkeumille. Parametri  $HV$  on materiaalin Vickers kovuus, jonka yksikkönä on  $\text{kgf/mm}^2$ . Parametri  $R$  on jännityssuhde sulkeuman kohdalla ja parametri  $\alpha = 0.226 + HV \cdot 10^{-4}$ .

Jos keskijännitys  $\sigma_m \neq 0$ , niin väsymisraja voidaan laskea numeerisesti asettamalla

$$R = \frac{\sigma_m - \sigma_w}{\sigma_m + \sigma_w}. \quad (6.7)$$

Iteratiivisia menetelmiä käytettäessä ensimmäiseksi väsymisrajan approksimaatioksi voidaan ottaa jännitysamplitudi  $\sigma_a$ .

Yhdistämällä yhtälön (6.6) mukainen malli väsymisrajalle ja sulkeumien ääriarvoanalyysi, voidaan väsymisrajalle jossain tilavuudessa  $V$  johtaa alaraja seuraavasti. Olkoon  $X_1, \dots, X_n$  otos suurimpia sulkeumia jostain kontrollitilavuudesta  $V_0$  (tai kontrollialalta  $A_0$ ). Sulkeumien kokona käytetään projektiopinta-alan neliöjuurta  $\sqrt{A}$ . Otokseen sovitetaan jokin ääriarvojakauma. Murakamin mallissa ääriarvojakautana käytetään Gumbelin jakaumaa.

Käytettäessä Gumbelin jakaumaa estimoidaan ensin otoksen perusteella jakautuman parametrit  $\hat{\mu}$  ja  $\hat{\sigma}$ . Sulkeuman karakteristinen koko  $x_T$  jossain toisessa tilavuudessa  $V$  saadaan nyt yhtälöllä

$$x_T = \hat{\mu} - \hat{\sigma} \ln \left( -\ln \left( \frac{T-1}{T} \right) \right),$$

missä

$$T = \frac{V}{V_0},$$

Arvoa  $T$  sanotaan *paluujaksoksi*. Väsymisrajan alaraja tilavuudessa  $V$  voidaan nyt esittää yhtälöllä

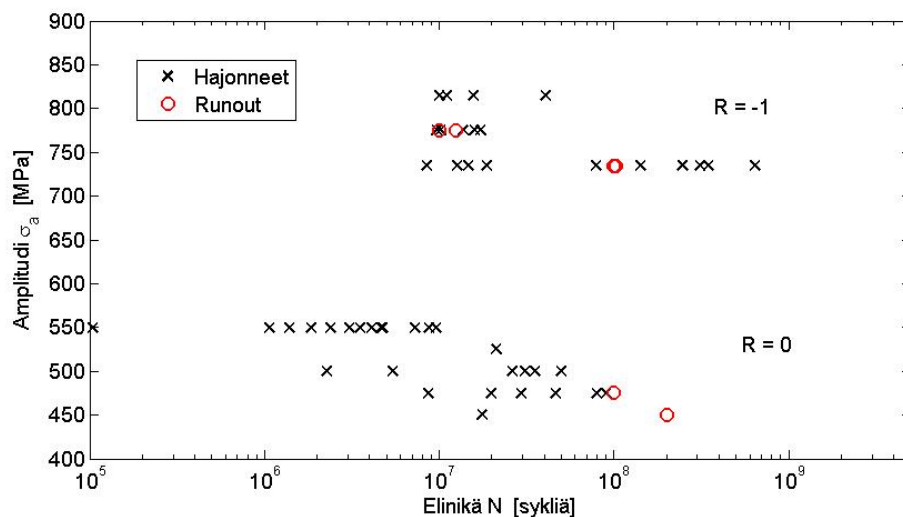
$$\sigma_{wl} = \frac{1.41(HV + 120)}{(x_T)^{1/6}} \left( \frac{R-1}{2} \right)^\alpha.$$

## 7. TULOKSET

### 7.1 Väsytykokeet

#### 7.1.1 Laakeriteräs B

Laakeriteräs B:lle tähän työhön saatiin 56 testisauvan väsytyskoetulokset. Väsytykset tehtiin aksiaaliväsytyksellä käyttäen jännityssuhteita  $R = 0$  ja  $R = -1$ . Kuvassa 7.1 on väsytykokeiden tulokset esitettynä S-N kuvaajassa. Lähes kaikki murtumat ydintyivät pinnan alla olevasta ei-metallisesta sulkeumasta. Neljässä sauvassa murtuma oli ydintynyt sauvan pinnasta ja yksi sauva oli hajonnut kiinnityksestä.

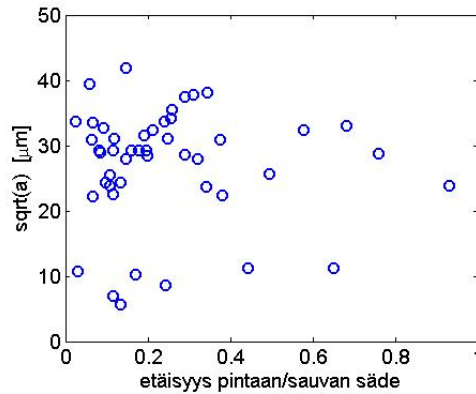


Kuva 7.1: Laakeriteräs B:n väsytykokeiden tulokset S-N kuvaajassa

Sulkeumat voidaan jakaa niiden muodon ja koon perusteella kahteen ryhmään. Suurimmassa osassa sauvoista murtuma on ydintynyt pallomaisesta oksidityyppisestä sulkeumasta. Seitsemässä sauvassa murtuma oli ydintynyt pallomaisia sulkeumia selvästi pienemmästä terävasärmäisestä ja kidemäisestä sulkeumasta. Kidemäiset sulkeumat näyttäisivät olevan testien perusteella harvinaisempia kuin pallomaiset sulkeumat, mutta kokonsa nähden selvästi vaarallisempia.

Kuvassa 7.2 on esitettynä murtuman aiheuttaneiden sulkeumien koko ja etäisyys sauvan pintaan. Sulkeumat eivät ole täysin tasaisesti jakautuneet etäisyyden suhteen, vaan tihenevät pintaa kohden. Mahdollisia syitä tälle voi olla esimerkiksi

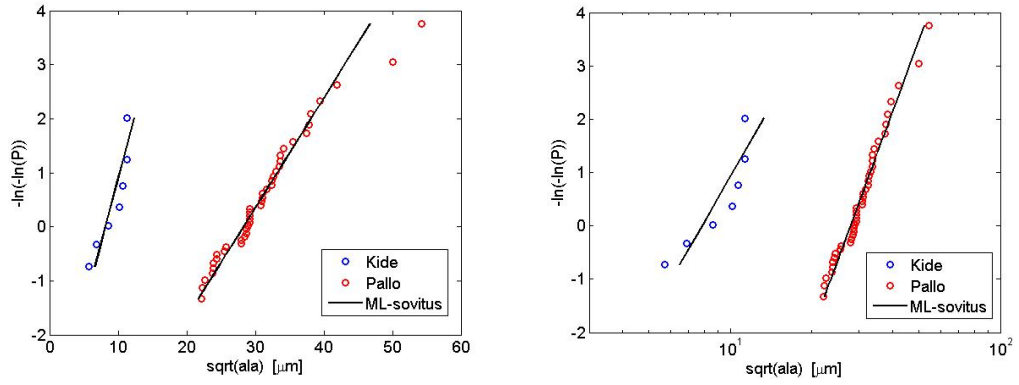
residuaalijännitys pintaa lähellä olevalla alueella tai kovuuden epätasainen jakautuminen testisauvassa [21].



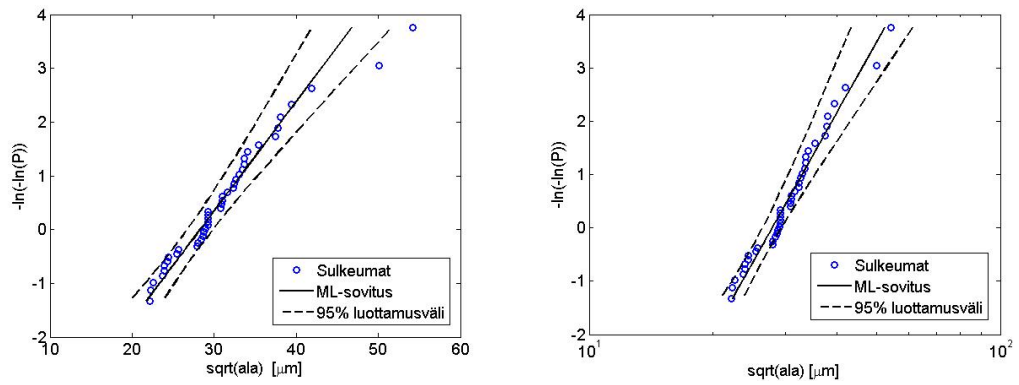
Kuva 7.2: Laakeriteräs B:n murtuman aiheuttaneiden sulkeumien koko ja etäisyys sauvan pintaan

Murtuman aiheuttaneiden sulkeumien kokoja sovitettiin ääriarvojakaumiin. Koska pallomaiset ja kidemäiset sulkeumat ovat kooltaan ja tyypiltään selvästi erilaisia, käsiteltiin näitä ryhmiä sovituksissa erikseen. Kuvassa 7.3 on esitettyä murtuman aiheuttaneiden sulkeumien koot Gumbelin ja Fréchet'n todennäköisyyskuvassa, sekä näille tehdyt suurimman uskottavuuden sovitukset. Kuvassa 7.4 on esitetty tarkemmin pallomaisten sulkeumien kokojen sovitukset Gumbelin ja Fréchet'n jakaumiin käyttäen suurimman uskottavuuden menetelmää. Yleiselle ääriarvojakaumalle saatiin ääriarvoindeksin estimaatiksi positiivinen arvo, joka viittaa Fréchet'n jakaumaan. Kuitenkin myös arvo  $\xi = 0$  sisältyy luottamusvälille, joten Gumbelin jakaumakin on mahdollinen.

Kuvan 7.4 perusteella Fréchet'n jakauman sopivuus aineistoon on hieman parempi kuin Gumbelin jakaumalla. Lisäksi sopivuutta arvioitiin Kolmogorov-Smirnovin yhden otoksen testillä. Testin  $p$ -arvoiksi saatiin 0.70 Gumbelin jakaumalle, 0.40 Fréchet'n jakaumalle ja 0.62 yleiselle ääriarvojakaumalle. Testin perusteella siis aineistoon sopii parhaiten Gumbelin jakauma, kuitenkin  $p$ -arvot ovat suhteellisen suuret kaikille jakaumille.



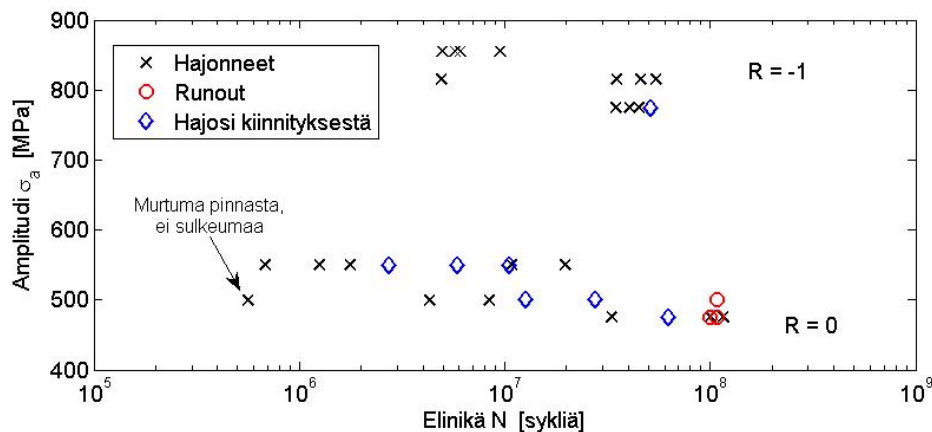
Kuva 7.3: Laakeriteräs B:n murtuman aiheuttaneiden sulkeumien koot (a) Gumbelin todennäköisyyskuvassa ja (b) Fréchet'n todennäköisyyskuvassa



Kuva 7.4: Pallomaisten sulkeumien koko sovitettuna (a) Gumbelin jakaumaan ja (b) Fréchet'n jakaumaan käyttäen suurimman uskottavuuden menetelmää

### 7.1.2 Laakeriteräs S

Laakeriteräs S:lle testattiin yhteensä 33 testisauvaa väsytykskokein. Kuvassa 7.5 on väsytykskokeiden tulokset S-N kuvaajassa. Osa testisauvoista hajosi sauvan kiinnityskohdasta. Hajonneista sauvoista yhdessä murtuma ydintyi sauvan pinnalta, eikä siitä löytynyt murtuman aiheuttavaa sulkeumaa. Kaikissa muissa hajonneissa sauvoissa murtuma ydintyi pinnan alla olevasta ei-metallisesta sulkeumasta. Runouteiksi päätyneet sauvat väsytetettiin portaittain uudelleen suuremmilla jännitystasoilla kunnes ne murtuivat. Näissäkin kaikissa murtuma ydintyi lopulta pinnan alla olevasta ei-metallisesta sulkeumasta.



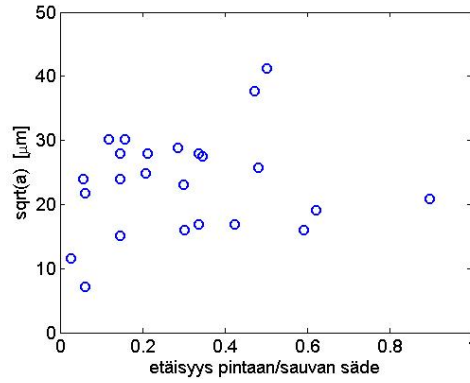
Kuva 7.5: Laakeriteräs S:n väsytykskokeiden tulokset S-N kuvaajassa

Taulukossa A.1 on listattuna murtuman aiheuttaneet sulkeumat testisauvoissa. Sulkeumat voidaan jakaa kahteen tyyppiin niiden sisältämien alkuaineiden mukaan. Suuremmat sulkeumat ovat pyöreitä oksideja, jotka sisältävät faaseina oksideja  $\text{Al}_2\text{O}_3$ ,  $\text{CaO}$ ,  $\text{MgO}$  ja  $\text{SiO}_2$ . Lisäksi joistakin oksideista löytyi kalsiumsulfidia  $\text{CaS}$ . Pienemmät sulkeumat ovat kulmikkaita titaaninitridejä  $\text{TiN}$ .

Kuvassa 7.6 on esitettyä sulkeumien koko ja etäisyys pintaan. Laakeriteräs S:lle ei ole havaittavissa sulkeumien keskittymistä pintaa kohden, vaan sulkeumat ovat jakautuneet melko tasaisesti.

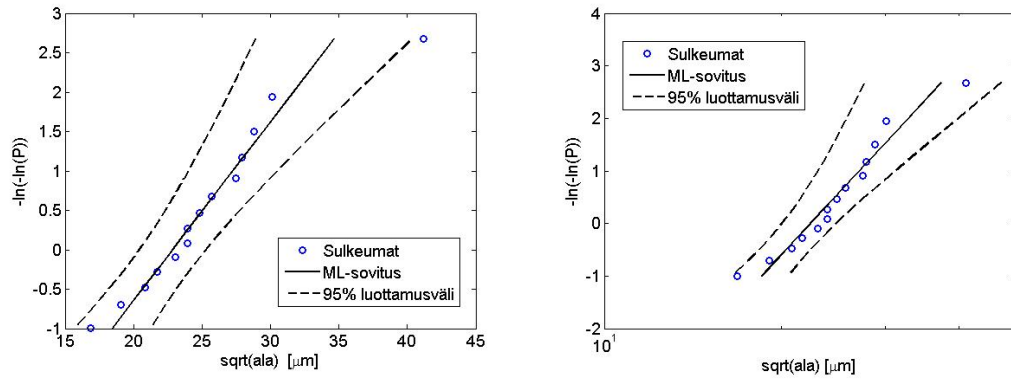
Kuvassa 7.7 on oksidityyppisten sulkeumien koot sovitettuna Gumbelin ja Fréchet'n jakaumiin sauvoille, joiden halkaisija oli 7 mm. Kolmogorov-Smirnov testin  $p$ -arvoiksi saatiin Gumbelin jakaumalle 0.99, Fréchet'n jakaumalle 0.93 ja 0.99 yleiselle ääriarvojakaumalle. Kuvassa 7.8 on oksidityyppisten sulkeumien sovitukset ohennetuille sauvoille, joiden halkaisija oli 6 mm. Kolmogorov-Smirnov testin  $p$ -arvoiksi saatiin tässä tapauksessa Gumbelin jakaumalle 0.43, Fréchet'n jakaumalle 0.43 ja yleiselle ääriarvojakaumalle 0.47.

Graafisesti ja testin perusteella sopivuus on halkaisijaltaan 7 mm sauvoille hyvä kaikkiin testattuihin jakaumiin. Ohennetuille sauvoille sopivuus jakaumiin oli



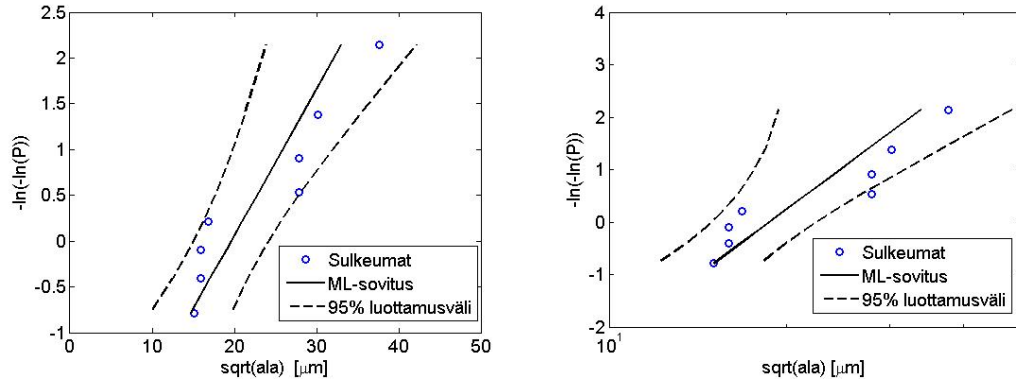
Kuva 7.6: Sulkeumien koko ja etäisyys sauvan pintaan

huonompi. Graafisesti tarkasteltuna Gumbelin jakauma sopii ohennetuille sauvoille paremmin, mutta Kolmogorov-Smirnov testin  $p$ -arvot ovat lähellä toisiaan kaikille testatuille jakaumille. On huomattava, että otoskoot olivat melko pieniä laakeriteräs S:lle, jolloin luottamusvälit ovat leveämpiä. Tämä vaikeuttaa sopivuuden arviointia graafisesti.



Kuva 7.7: Pallomaisten sulkeumien koko sovitettuna (a) Gumbelin jakaumaan ja (b) Fréchet'n jakaumaan käyttäen suurimman uskottavuuden menetelmää (sauvan halkaisija 7 mm)





Kuva 7.8: Pallomaisten sulkeumien koko sovitettuna (a) Gumbelin jakaumaan ja (b) Fréchet'n jakaumaan käyttäen suurimman uskottavuuden menetelmää (ohennetut sauvat, halkaisija 6 mm)

## 7.2 Hiepinnan ja murtopinnan sulkeumien vertailua

### 7.2.1 Laakeriteräs B

Muutetaan hiepinnan kaksiulotteinen sulkeuma-aineisto kolmiulotteiseksi Murakamin esittämällä menetelmällä. Laakeriteräs B:lle hiepinnan sulkeumien keskimääräinen koko on  $h = 9.3093 \mu\text{m}$ , missä kokona on käytetty alan neliöjuurta. Hiepinta-alueet ovat kooltaan  $25 \text{mm}^2$ , joten kontrollitilavuudeksi saadaan

$$V_0 = A_0 \times h \approx 0.2326 \text{mm}^3.$$

Otetaan kohdetilavuudeksi testisauvan suoran osan tilavuus. Testisauvan suoran osan halkaisija on 7mm ja pituus 14mm, joten tilavuudeksi saadaan

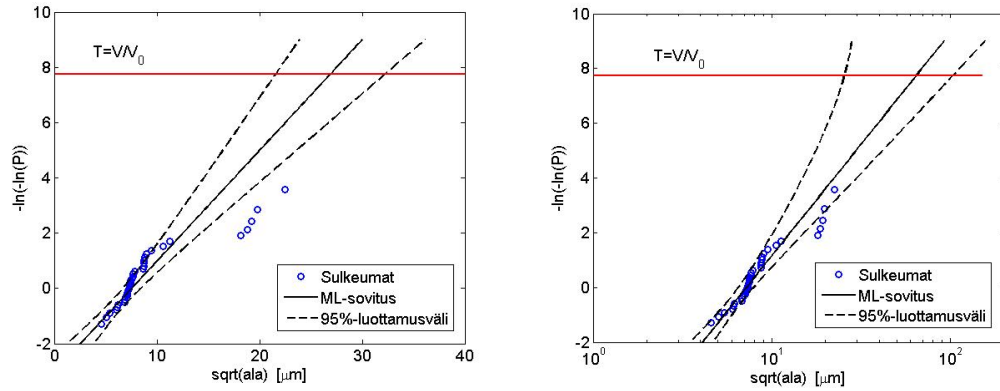
$$V = \pi/4 \times 7^2 \times 14 \text{mm}^3 \approx 538.78 \text{mm}^3.$$

Näin ollen paluujakso on  $T = V/V_0 = 2315$ .

Kuvassa 7.9 on laakeriteräs B:n hiepinnan suurimpiin sulkeumiin sovitettu Gumbelin jakauma ja Fréchet'n jakauma suurimman uskottavuuden menetelmällä. Vaakasuora viiva vastaa paluujaksoa  $T = V/V_0$ . Karakteristinen koko tilavuudessa  $V$  voidaan nyt määrittää vaakasuoran viivan ja sovituksen leikkauspisteestä. Gumbelin jakaumalle karakteristiseksi kooksi saadaan  $x_T = 26.9 \mu\text{m}$  ja Fréchet'n jakaumalle  $x_T = 64.7 \mu\text{m}$ . Fréchet'n jakauman antama karakteristinen koko on huomattavasti suurempi kuin Gumbelin jakaumalla. Murtopinnan aineisto ei sisällä yhtään näin suurta sulkeumaa, joten Fréchet'n jakauman antama karakteristinen koko tuntuu epärealistisen suurelta. Karakteristisen koon 95%-luottamusväli on Gumbelin ja-

kaumalle [21.5, 32.3] ja Fréchet'n jakaumalle [25.5, 103.8]. Fréchet'n jakaumalle luottamusväli on selvästi leveämpi kuin Gumbelin jakaumalle, joka merkitsee selvästi suurempaa epävarmuutta ekstrapoloinnissa.

Kuvien perusteella aineisto ei sovi erityisen hyvin kumpaankaan jakaumaan, jonkin verran paremmin kuitenkin Fréchet'n jakaumaan. Kolmogorov-Smirnov testin  $p$ -arvoiksi saatiin  $p = 0.09$  Gumbelin jakaumalle ja  $p = 0.44$  Fréchet'n jakaumalle. Testin perusteella sopivuus Fréchet'n jakaumaan on selvästi parempi.



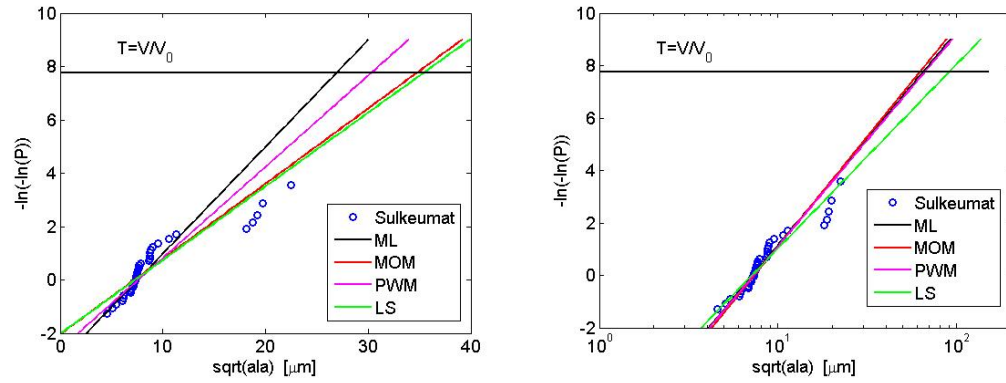
Kuva 7.9: Laakeriteräs B:n hieppinnan sulkeumat sovitettuna (a) Gumbelin jakaumaan ja (b) Fréchet'n jakaumaan käyttäen suurimman uskottavuuden menetelmää

Vertailun vuoksi karakteristinen koko määritettiin myös eri estimointimenetelmillä. Kuvassa 7.10 on hieppinnan aineisto sovitettu Gumbelin ja Fréchet'n jakaumaan eri estimointimenetelmiä käyttäen. Gumbelin jakaumalla erot estimointimenetelmien välillä ovat melko suuret. Osaksi tämä johtuu aineiston huonosta sopivuudesta Gumbelin jakaumaan. Fréchet'n jakaumalla pienimmän neliösumman menetelmä antaa selvästi suurimman arvon karakteristiselle koolle. Muiden menetelmien välillä erot ovat pienet. Taulukossa 7.1 on Gumbelin jakaumalle, Fréchet'n jakaumalle ja yleiselle ääriarvojakaumalle lasketut karakteristiset koot eri estimointimenetelmillä.

Taulukko 7.1: Jakaumille määritetyt karakteristiset koot paluujaksolla  $T = V/V_0$  käyttäen eri estimointimenetelmiä

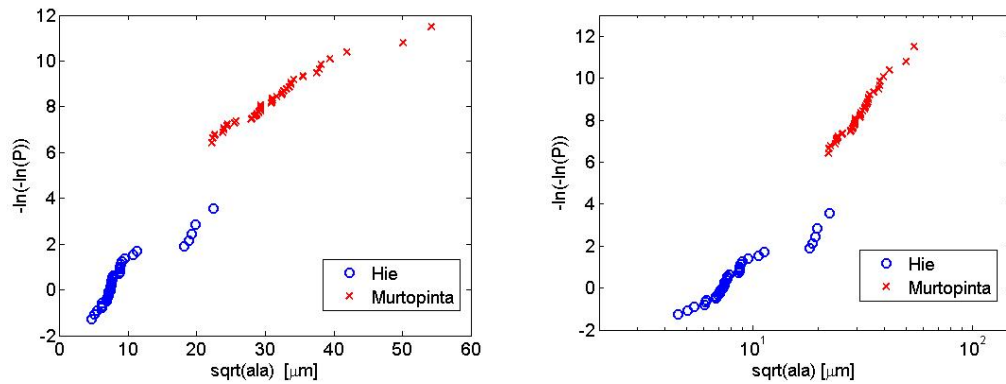
	ML	MOM	PWM	LS
Gumbel	26.9	34.7	30.3	35.4
Fréchet	64.7	62.1	66.1	90.4
GEV	79.1	-	102.3	-

Hieppinnan ja murtopinnan aineisto voidaan esittää samassa kuvassa muuntamalla murtopinnan aineisto kontrollitulavuuteen  $V_0$  yhtälöllä (5.1). Kuvassa 7.11 on tällä tavoin muunnettu aineisto esitetty Gumbelin ja Fréchet'n todennäköisyyskuvassa.



Kuva 7.10: Laakeriteräs B:n tiepinnan sulkeumat sovitettuna (a) Gumbelin jakaumaan ja (b) Fréchet'n jakaumaan käyttäen eri estimointimenetelmiä (ML=suurimman uskottavuuden menetelmä, MOM=momenttimenetelmä, PWM=todennäköisyyksillä painotettujen momenttien menetelmä ja LS=pienimmän neliösumman menetelmä)

Gumbelin asteikolla parhaiten aineistoa kuvaa bilineaarinen kuvaaja, joka viittaisi eri sulkeumatyyppeihin tiepinnan ja murtopinnan välillä. Fréchet'n asteikolla aineiston kuvaaja on lähempänä suoraa, joskin sopivuus ei ole tässäkään tapauksessa erityisen hyvä. Tiepinnan viisi suurinta sulkeumaa erottuvat molemmissa kuvissa selvästi muusta aineistosta.



Kuva 7.11: Laakeriteräs B:n tiepinnan ja murtopinnan sulkeumien vertailu (a) Gumbelin ja (b) Fréchet'n todennäköisyyskuvassa

## 7.2.2 Laakeriteräs S

Laakeriteräs S:lle analysoitiin yhteensä 28 tiepinta-aluetta, joiden koko oli  $A_0 = 25\text{mm}^2$ . Tiepinta-aineisto luokiteltiin alkuaineiden mukaan oksideihin, jotta se vastaisi mahdollisimman hyvin murtopinnoilta määritettyjen sulkeumien aineistoa. Suurimpien sulkeumien keskimääräinen koko luokitellulle aineistolle oli  $h = 15.322\mu\text{m}$ .

Näin ollen kontrollitilavuudeksi saadaan

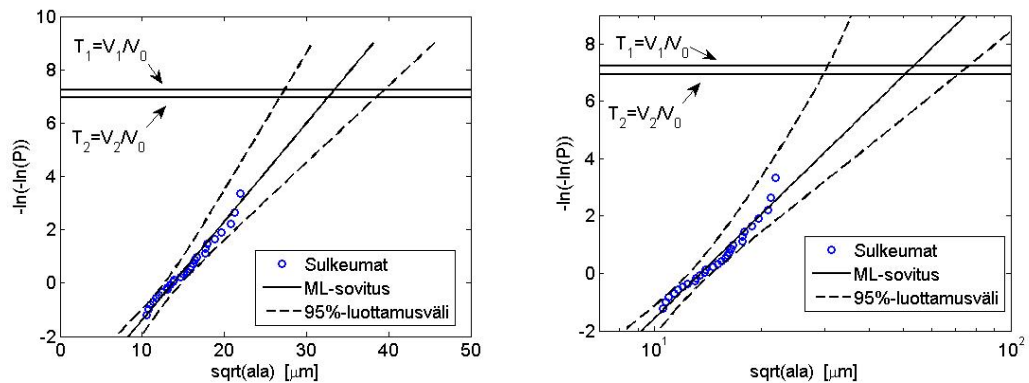
$$V_0 = A_0 \times h \approx 0.383\text{mm}^3.$$

Väsytyssauvojen suoran osan halkaisijat olivat  $d_1 = 7\text{mm}$  ja  $d_2 = 6\text{mm}$ . Molemmissa tapauksissa suoran osan pituus oli  $l = 14\text{mm}$ . Näin ollen kohdetilavuuksiksi saadaan

$$V_1 = \frac{\pi}{4}d_1^2l \approx 538.78\text{mm}^3 \quad \text{ja} \quad V_2 = \frac{\pi}{4}d_2^2l \approx 395.84\text{mm}^3.$$

Paluujaksot ovat siis  $T_1 = V_1/V_0 \approx 1406$  ja  $T_2 = V_2/V_0 \approx 1033$ .

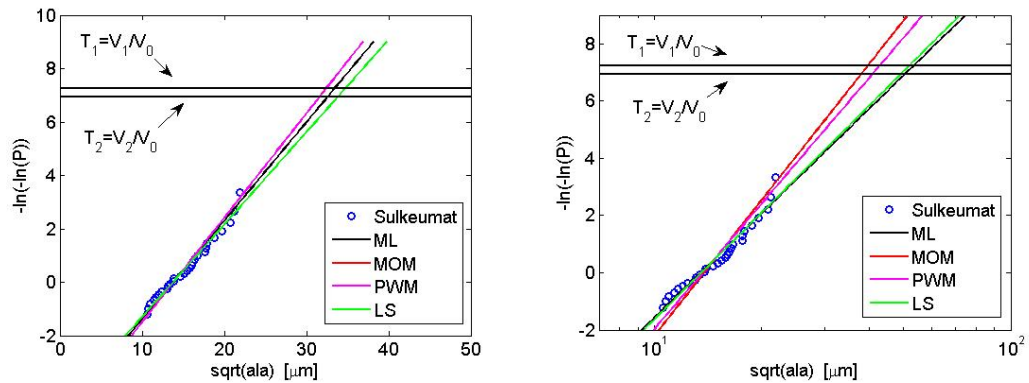
Kuvassa 7.12 on hieppinnan luokitellut suurimmat sulkeumat sovitettuna Gumbelin ja Fréchet'n jakaumaan käyttäen suurimman uskottavuuden menetelmää. Vaakasuorat viivat vastaavat paluujaksoja  $T_1 = V_1/V_0$  ja  $T_2 = V_2/V_0$ . Karakteristinen koko tilavuudessa  $V_1$  ja  $V_2$  voidaan lukea sovituksen ja vastaavan vaakasuoran viivan leikkauspisteestä. Karakteristiset koot Gumbelin jakaumalle ovat  $x_{T_1} = 33.4\mu\text{m}$  ja  $x_{T_2} = 32.6\mu\text{m}$ . Vastaavat arvot Fréchet'n jakaumalle ovat  $x_{T_1} = 53.6\mu\text{m}$  ja  $x_{T_2} = 50.5\mu\text{m}$ . Fréchet'n jakauman antamat karakteristiset koot ovat selvästi suurempia kuin Gumbelin jakauman, tosin ero ei ole niin suuri kuin laakeriteräs B:n aineistolle. Gumbelin jakaumalle 95%-luottamusväli karakteristiselle koolle  $X_{T_1}$  on  $[27.3, 39.5]$  ja koolle  $x_{T_2}$   $[26.7, 38.5]$ . Vastaavat 95%-luottamusvälit Fréchet'n jakaumalle ovat  $[28.6, 65.3]$  ja  $[27.7, 60.8]$ . Tässäkin tapauksessa luottamusvälit ovat selvästi leveämpiä Fréchet'n jakaumalle.



Kuva 7.12: Laakeriteräs S:n hieppinnan sulkeumat sovitettuna (a) Gumbelin jakaumaan ja (b) Fréchet'n jakaumaan käyttäen suurimman uskottavuuden menetelmää

Kuvassa 7.13 on vertailtu eri estimointimenetelmiä Gumbelin ja Fréchet'n jakaumalle. Gumbelin jakaumalle eri estimointimenetelmien antamat tulokset ovat lähellä toisiaan. Fréchet'n jakaumalle erot ovat suuremmat. Fréchet'n jakaumalle momenttimenetelmä ja painotettu momenttimenetelmä antavat tässä tapauksessa selvästi pienempiä arvoja karakteristiselle koolle kuin suurimman uskottavuuden menetel-

mä ja pienimmän neliösumman menetelmä. Taulukossa 7.2 on jakaumille lasketut karakteristiset koot eri estimointimenetelmillä.

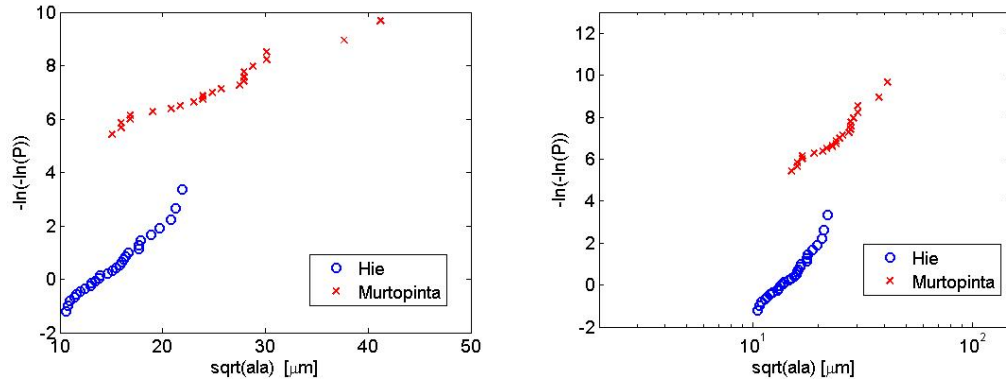


Kuva 7.13: Laakeriteräs S:n hieppinnan sulkeumat sovitettuna (a) Gumbelin jakaumaan ja (b) Fréchet'n jakaumaan käyttäen eri estimointimenetelmiä

Taulukko 7.2: Jakaumille määritetyt karakteristiset koot paluujaksoilla  $T_1 = V_1/V_0$  ja  $T_2 = V_2/V_0$  käyttäen eri estimointimenetelmiä

		ML	MOM	PWM	LS
$T_1$	Gumbel	33.4	32.4	32.4	34.7
	Fréchet	53.6	39.8	43.0	52.1
	GEV	27.4	-	26.6	-
$T_2$	Gumbel	32.6	31.6	31.6	33.8
	Fréchet	50.5	38.1	41.0	49.2
	GEV	27.1	-	26.2	-

Kuvassa 7.14 on vertailtu hieppinnan ja murtopinnan sulkeumia Gumbelin ja Fréchet'n todennäköisyyskuvaajissa. Kuvista nähdään, että aineiston kuvaaminen ei onnistu erityisen hyvin käyttäen yhtälöä (5.1), varsinkin Gumbelin jakauman tapauksessa. Fréchet'n jakaumalla aineiston kuvaaja on lähempänä suoraa, mutta sopivuus ei ole erityisen hyvä.



Kuva 7.14: Laakeriteräs S:n hieppinnan ja murtopinnan sulkeumien vertailu (a) Gumbelin ja (b) Fréchet'n todennäköisyyskuvassa

### 7.2.3 Teräs A

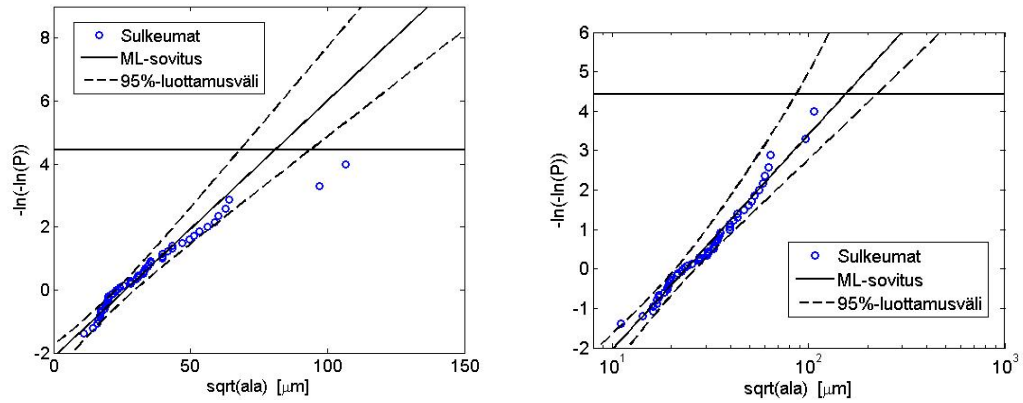
Teräs A:lle murtopinnan sulkeumia on yhteensä 58 ja hieppintoja analysoitiin 52. Väsytykokeet suoritettiin laakeriteräksistä poiketen käyttäen pyöröväsytystä väsytyssuhteella  $R = -1$ . Tarkemmat tiedot materiaalista ja väsytykokeista löytyvät Roikon diplomityöstä [24].

Lähes kaikki murtumat olivat ydintyneet pinnalla olevasta tai aivan pinnan lähellä olevasta sulkeumasta. Tästä syystä tarkastellaan testisauvan suoran osan pinta-alaa, joka on  $A = 2162 \text{ mm}^2$ . Hieppinnat olivat pinta-alaltaan  $25 \text{ mm}^2$ , joten paluujaksoksi saadaan  $T \approx 85$ .

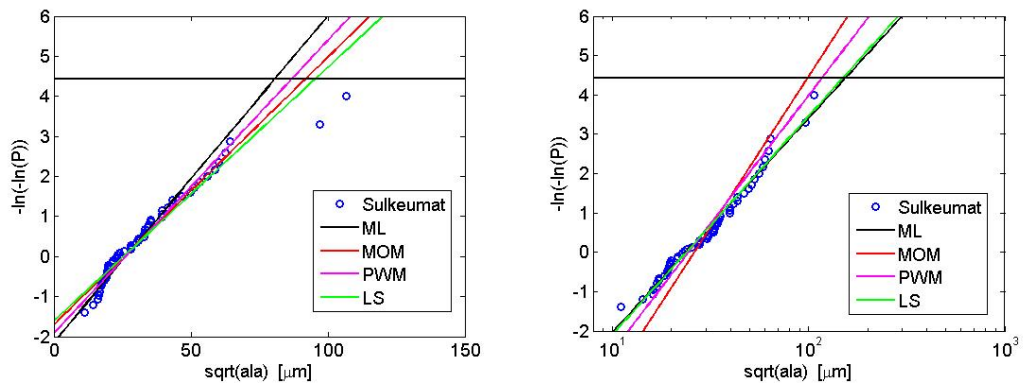
Karakteristiseksi kooksi saadaan Gumbelin jakaumalle  $80.8 \mu\text{m}$  ja  $155.3 \mu\text{m}$  Fréchet'n jakaumalle. 95%-luottamusväli on Gumbelin jakaumalle  $[67.9, 93.6]$  ja Fréchet'n jakaumalle  $[86.7, 223.8]$ . Kuten laakeriterästenkin tapauksessa saadaan Fréchet'n jakaumaa käyttäen selvästi leveämpi luottamusväli karakteristiselle koolle. Kuvassa 7.16 ja taulukossa 7.3 on vertailtu eri estimointimenetelmiä. Eri estimointimenetelmillä saadaan selvästi eri suuruisia estimaatteja. Varsinkin Fréchet'n jakaumalle.

Taulukko 7.3: Jakaumille määritetyt karakteristiset koot paluujaksolla  $T = V/V_0$  käyttäen eri estimointimenetelmiä

	ML	MOM	PWM	LS
Gumbel	80.8	92.0	87.0	95.5
Fréchet	155.3	99.6	117.8	150.6
GEV	121.1	-	80.9	-

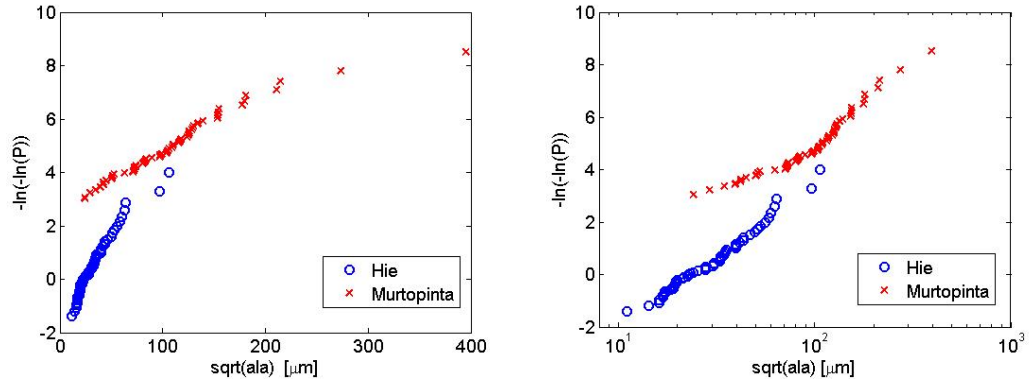


Kuva 7.15: Teräs A:n sulkeumat sovitettuna (a) Gumbelin jakaumaan ja (b) Fréchet'n jakaumaan käyttäen suurimman uskottavuuden menetelmää



Kuva 7.16: Teräs A:n sulkeumat sovitettuna (a) Gumbelin jakaumaan ja (b) Fréchet'n jakaumaan käyttäen eri estimointimenetelmiä

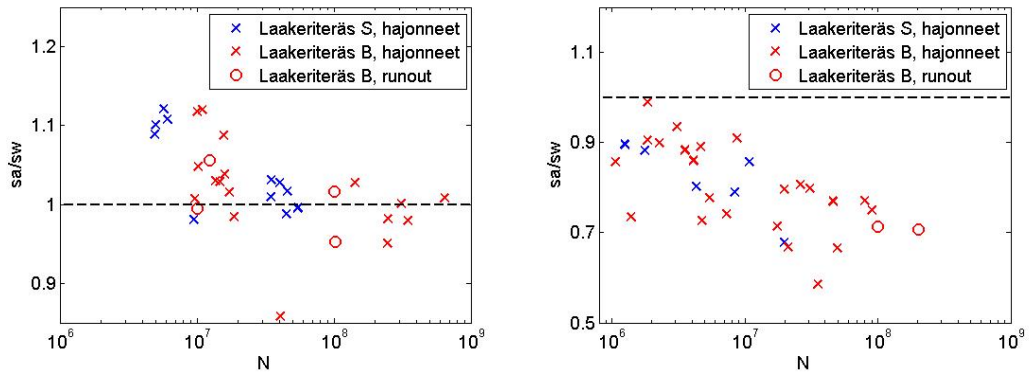
Hiepinnan ja murtopinnan sulkeumia on vertailtu kuvassa 7.17. Gumbelin todennäköisyyskuvassa aineistoa vaikuttaisi kuvaavan parhaiten bilineaarinen kuvaaja. Fréchet'n jakaumalla aineiston kuvaaja on lähempänä suoraa, mutta varsinkin murtopinnan pienimmät sulkeumat erottuvat muusta aineistosta.



Kuva 7.17: Teräs A:n hiepinnan ja murtopinnan sulkeumat esitettynä (a) Gumbelin kuvaajassa ja (b) Fréchet'n kuvaajassa

### 7.3 Murakami-Endo mallin soveltaminen

Testisauvoille, jotka murtuivat sulkeumasta, laskettiin Murakamin mallin mukainen väsymisraja. Murtuman syynä oli kaikissa tapauksissa pinnan sisällä oleva sulkeuma, joten kertoimena käytetään  $C = 1.56$ . Laakeriteräs B:lle oli määritetty HRC-kovuus 15 testisauvalle. Keskiarvoksi saatiin  $HRC = 61.0$ , jota vastaava Vickers-kovuus on noin 720. Laakeriteräs S:lle ei tähän työhön saatu kokeellisesti määritettyjä kovuusarvoja, joten käytetään sille sen nimellistä HRC-kovuusarvoa, joka on 62. Sitä vastaava Vickers-kovuus on noin 746.



Kuva 7.18: Modifioidut S-N kuvaajat laakeriteräs B:lle ja laakeriteräs S:lle (a) väsytyssuhteella  $R = -1$  ja (b) väsytyssuhteella  $R = 0$

Kuvassa 7.18 on modifioidut S-N kuvaajat laakeriteräs B:lle ja laakeriteräs S:lle. Kuvien perusteella malli toimii selvästi paremmin väsytyssuhteelle  $R = -1$  kuin väsytyssuhteelle  $R = 0$ . Väsytyssuhteella  $R = -1$  mallin antamat suhteet murtuneille testisauvoille ovat lähes kaikissa tapauksissa yli yhden tai lähellä yhtä. Väsytyssuhteella  $R = 0$  mallin antamat suhteet ovat järjestäen alle yhden, jonka perusteella



vaikuttaa, että malli antaa väsymisrajalle tässä tapauksessa liian suuria arvoja.

Hiepinnan suurimpien sulkeumien avulla voidaan laskea Murakamin mallin mukainen alaraja testisauvan tilavuudessa käyttäen aiemmin kuvattua menetelmää. Sulkeumakokoina käytetään Gumbelin jakaumalla määritettyjä karakteristisia ko-koja testisauvan tilavuudessa. Tällä tavoin lasketut alarajat väsymisrajalle on esitetty taulukossa 7.4. Väsytyssuhteella  $R = -1$  saatu alaraja vaikuttaa molemmille laakeriteräksille järkevältä, koska tätä pienemmillä jännityksillä ei ole hajonnut yhtään testisauvaa. Sen sijaan väsytyssuhteelle  $R = 0$  saatu alaraja ei tunnu järkevältä, koska testisauvoja on hajonnut kaikille laakeriteräksille myös tätä pienemmillä jännityksillä.

Taulukko 7.4: Murakami-Endo mallin mukaan lasketut väsymisrajat

	R=0	R=-1
Laakeriteräs B	556	684
Laakeriteräs S	552	680
Laakeriteräs S, ohennettu	555	683

## 8. YHTEENVETO

Tässä työssä tarkasteltiin teräksestä löytyvien suurimpien sulkeumien jakaumia, sekä suurimpien sulkeumien yhteyttä teräksen väsymiseen. Erityisesti tarkasteltiin murtuman ydintäneiden sulkeumien kokojakaumaa ja miten sitä voitaisiin ennustaa hieppinnan sulkeuma-aineiston avulla. Laakeriteräs B:n ja S:n kohdalla murtuman ydintäneet sulkeumat voidaan jakaa oksidityypisiin pallomaisiin sulkeumiin ja kidemäisiin nitridisulkeumiin. Pallomaiset sulkeumat olivat selvästi kidemäisiä sulkeumia yleisempiä, sekä kooltaan tyypillisesti suurempia. Nitridityyppisten sulkeumien vähyydestä johtuen tilastolliset tarkastelut tehtiin vain pallomaisille sulkeumille.

Murtuman aiheittaneiden sulkeumien kokoja sovitettiin Gumbelin jakaumaan, Fréchet'n jakaumaan ja yleiseen ääriarvojakaumaan. Jakaumien sopivuutta aineistoon testattiin Kolmogorov-Smirnovin yhden otoksen testillä. Lisäksi sopivuutta tarkasteltiin käyttäen erityisesti ääriarvojakaumille sopivaa graafista menetelmää. Työssä havaittiin, että murtuman aiheuttaneiden sulkeumien koot sopivat hyvin ääriarvojakaumiin. Laakeriteräs B:lle Kolmogorov-Smirnov testin perusteella parhaiten aineistoon sopi Gumbelin jakauma, mutta myös muiden jakaumien sopivuus oli hyvä. Graafisen tarkastelun perusteella sopivuus oli paras Fréchet'n jakaumaan. Laakeriteräs S:lle aineisto oli jaettu kahden kokosiin sauvoihin. Molemmissa tapauksissa aineisto sopi hyvin ääriarvojakaumiin. Kolmogorov-Smirnov testin antamat tulokset olivat kaikille jakaumille hyvin lähellä toisiaan, joten niiden perusteella parhaan jakauman valinta on vaikeaa. Myöskään graafisella menetelmällä ei halkaisijaltaan 7 mm sauvojen aineistolle voida nähdä suuria eroja. Halkaisijaltaan 6 mm sauvojen aineisto sopi graafisesti hieman paremmin Gumbelin jakaumaan.

Hieppinnalta määritettyjä suurimpia sulkeumia verrattiin murtopinnan sulkeumiin. Tarkoituksena oli tutkia pystytäänkö murtopinnan sulkeumien kokoja ennustamaan hieppinnan sulkeumakokojen avulla. Hieppinnalta löytyy hyvin monentyyppisiä sulkeumia, ja eräs ongelma onkin näiden luokittelu siten, että ne vastaisivat mahdollisimman hyvin murtopinnan sulkeumia. Tässä työssä luokittelu tehtiin alkuaineiden mukaan, mutta mahdollisesti muutkin luokittelutavat, esimerkiksi sulkeuman muotoon perustuvat ovat mahdollisia. Toinen merkittävä ongelma on kaksiulotteisen hieppinnan ja kolmiulotteisen testisauvan välisen kokosuhteen määrittäminen. Laakeriteräksille saatiin tässä työssä hyvin suuri kokosuhte hieppinnan ja murtopinnan välille. Suuri kokosuhte merkitsee myös suurta epävarmuutta ennustuksessa, joten

parempiin tuloksiin voitaisiin päästä pienentämällä kokosuhdetta esimerkiksi kasvattamalla hiepintojen kontrollialaa.

Hiepinnan aineistosta määritetyn suurimpien sulkeumien jakauman avulla voidaan laskea sulkeumien karakteristiset koot testisauvan tilavuudessa. Karakteristinen koko kuvaa suurimman sulkeuman tyypillistä kokoa, kun tutkitaan tietty tilavuus terästä. Jakauman parametrien estimointiin käytetty menetelmä vaikuttaa laskettuun karakteristisen koon arvoon. Jakaumien parametrit estimoitiin tässä työssä käyttäen suurimman uskottavuuden menetelmää, jolloin saadaan myös luottamusvälit karakteristiselle koolle. Vertailun vuoksi karakteristinen koko laskettiin myös käyttäen kolmea muuta estimointimenetelmää. Tuloksista nähdään, että joissain tapauksissa eri estimointimenetelmät antavat selvästi erilaisia arvoja karakteristiselle koolle. Parhaan estimointimenetelmän valinta vaatisi kuitenkin lisää tutkimusta.

Karakteristisia kokoja verrattiin pääasiassa käyttäen Gumbelin ja Fréchet'n jakaumia. Tuloksista nähdään, että Fréchet'n jakaumaa käyttäen saatiin kaikille teräslaaduille selvästi suurempia arvoja karakteristiselle koolle kuin Gumbelin jakaumaa käyttäen. Suurimman uskottavuuden menetelmää ja Fréchet'n jakaumaa käyttäen karakteristiset koot olivat molemmille laakeriteräksille suurempia kuin yksikään murtopinnalta löytynyt sulkeuma. On kuitenkin huomattava, että luottamusvälit karakteristiselle koolle olivat hyvin leveät Fréchet'n jakaumaa käyttäen, joten myös lähempänä murtopinnan aineistoa olevat karakteristiset koot ovat mahdollisia. Gumbelin jakaumaa käyttäen karakteristiset koot olivat pienempiä ja lähempänä murtopinnan aineistoa. Myös luottamusvälit karakteristiselle koolle olivat kapeampia.

Hiepinnan ja murtopinnan aineistoja vertailtiin myös graafisesti. Tarkoituksena oli tutkia olisivatko aineistot saman tyyppisestä jakaumasta, joiden välinen yhteys voidaan laskea kokosuhteen avulla. Tuloksista nähdään, että yksinkertaista yhteyttä aineistoja kuvaavien jakaumien välille ei voida muodostaa. On kuitenkin huomattava, että graafiseen vertailuun vaikuttaa huomattavasti esimerkiksi käytetty kokosuhte ja sulkeumien luokittelu.

Suurimpien sulkeumien yhteyttä teräksen väsymiseen tarkasteltiin käyttäen Murakami-Endo mallia. Mallissa käytetään Gumbelin jakaumalla määritettyä karakteristista kokoa testisauvan tilavuudessa oleville sulkeumille, jonka avulla saadaan laskettua alaraja väsymisrajalle. Työssä käytetylle aineistolle malli toimi selvästi paremmin väsytyssuhteelle  $R = -1$ . Väsytyssuhteelle  $R = 0$  mallin antama väsymisrajan alaraja ei tunnu järkevältä, koska myös tätä pienemmillä jännityksillä hajosi väsytystesteissä testisauvoja. Mallin soveltamista tälle väsytyssuhteelle pitäisikin tutkia vielä tarkemmin.

# LÄHTEET

- [1] C.W. Anderson and S.G. Coles. The largest inclusions in a piece of steel. *Extremes*, 5(3):237–252, 2002.
- [2] A. Azzalini. *Statistical Inference Based on the Likelihood*. Chapman and Hall, 1996.
- [3] J. Beirlant, Y. Goegebeur, J. Segers, and J. Teugels. *Statistics of Extremes Theory and Applications*. Wiley, 2004.
- [4] S. Beretta, C. Anderson, and Y. Murakami. Extreme value models for the assessment of steels containing multiple types of inclusions. *Acta Materialia*, 54(8):2277–2289, 2006.
- [5] S. Beretta and Y. Murakami. Largest-extreme-value distribution analysis of multiple inclusion types in determining steel cleanliness. *Metallurgical and Materials Transactions B*, 32(3):517–523, 2001.
- [6] D.F. Brenner and G. Casella. *Theory of Multivariate Statistics*. Springer-Verlag, 1999.
- [7] G. Casella and R.L. Berger. *Statistical Inference*. Duxbury Press, 2nd edition, 2002.
- [8] S. Coles. *An Introduction to Statistical Modeling of Extreme Values*. Springer, 2001.
- [9] S.G. Coles and M.J. Dixon. Likelihood-based inference for extreme value models. *Extremes*, 2(1):5–23, 1999.
- [10] L. Haan and A. Ferreira. *Extreme Value Theory: An Introduction*. Springer, 2006.
- [11] J.R.M. Hosking, J.R. Wallis, and E.F. Wood. Estimation of the generalized extreme value distribution by the method of probability weighted moments. *Technometrics*, 27(3):251–261, 1985.
- [12] H-K. Hurme. Teräksen tilastollinen rakenneanalyysi. Diplomityö, Tampereen teknillinen yliopisto, 2009.
- [13] P. Huuhtanen and A. Kallinen. *Matemaattinen tilastotiede*. Tampereen Yliopisto, 1998.

- [14] E. Joossens. *Extreme Value Statistics: Second-Order Models and Applications to Metal Fatigue*. Leuven, 2006.
- [15] P. Juvonen. *Effects of Non-Metallic Inclusions on Fatigue Properties of Calcium Treated Steels*. PhD thesis, Helsinki University of Technology, 2004.
- [16] O. Kaleva. Matemaattinen tilastotiede. luentomoniste, 2010.
- [17] S. Kotz and S. Nadarajah. *Extreme Value Distributions: Theory and Applications*. World Scientific Publishing Company, 2001.
- [18] P. Laininen. *Todennäköisyys ja sen tilastollinen soveltaminen*. Otatieto, 1998.
- [19] N. Mann, R. Schafer, and N. Singpurwalla. *Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data*. John Wiley & Sons, 1974.
- [20] Y. Murakami. *Metal Fatigue: Effects of Small Defects and Nonmetallic Incusions*. Elsevier Science, 2002.
- [21] Y. Murakami, M. Takada, and T. Toriyama. Super-long life tension-compression fatigue properties of quenched and tempered 0.46% carbon steel. *International Journal of Fatigue*, 16(9):661–667, 1998.
- [22] P.F. Rasmussen and N. Gautam. Alternative pwm-estimators of the gumbel distribution. *Journal of Hydrology*, 280(1-4):265–271, 2003.
- [23] R.D. Reiss and M. Thomas. *Statistical Analysis of Extreme Values*. Birkhauser, 2nd edition, 2001.
- [24] A. Roiko. The extreme value analysis of non-metallic inclusions and their effect on the fatigue limit of steel. Master’s thesis, Aalto University, 2010.
- [25] K. Ruohonen. Luotettavuus, käytettävyyys ja huollettavuus. luentomoniste, 2002.
- [26] P.K. Sen and J.M. Singer A.C. Pedrosa de Lima. *From Finite Sample to Asymptotic Methods in Statistics*. Cambridge University Press, 2009.
- [27] R. Takahashi and M. Sibuya. Metal fatigue, wicksell transform and extreme values. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 18(3):301–312, 2002.
- [28] K. Wallin. Statistical aspects of fatigue life and endurance limit. *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, 33(6):333–344, 2010.

- [29] R.E. Walpole, R.H. Myers, S.L. Myers, and K. Ye. *Probability and Statistics for Engineers and Scientists*. Prentice Hall, 8th edition, 2007.
- [30] S.D. Wicksell. The corpuscle problem: A mathematical study of a biometric problem. *Biometrika*, 17(1/2):84–99, 1925.

## A. LIITTEITÄ

### A.1 Väsytyiskoetulokset laakeriteräs S:lle

Taulukko A.1: Laakeriteräs S murtuman aiheuttaneiden sulkeumien koko  $\sqrt{a}$  ja etäisyys pinnasta  $d$ . Tähdellä (\*) merkityt sauvat ovat halkaisijaltaan 6mm<sup>2</sup>.

Sauva	$\sigma_a$ (MPa)	$\sigma_m$ (MPa)	N (sykliä)	$\sqrt{a}$ ( $\mu m$ )	$d$ ( $\mu m$ )
S3C	855	0	$6.07 \cdot 10^6$	23.9	197
S4B	775	0	$4.49 \cdot 10^7$	21.7	212
S4D	815	0	$3.49 \cdot 10^7$	20.8	3134
S7A	855	0	$4.98 \cdot 10^6$	23.0	1038
S7D	775	0	$3.48 \cdot 10^7$	24.8	725
S8A	815	0	$5.45 \cdot 10^7$	16.8	1484
S8B	855	0	$9.46 \cdot 10^6$	11.5	94
S8C	775	0	$4.03 \cdot 10^7$	27.5	1204
S10A	815	0	$4.59 \cdot 10^7$	19.1	2160
S10B	855	0	$5.71 \cdot 10^6$	25.7	1666
S11C	815	0	$4.93 \cdot 10^6$	28.8	997
S1A(*)	475	475	$1.08 \cdot 10^8 \rightarrow$	15.1	432
S3B(*)	475	475	$9.97 \cdot 10^7$	27.9	998
S5C(*)	475	475	$3.32 \cdot 10^7$	37.7	1403
S6B(*)	475	475	$1.16 \cdot 10^8$	16.0	904
S6D(*)	475	475	$1.00 \cdot 10^8 \rightarrow$	16.0	1761
S4A(*)	500	500	$4.32 \cdot 10^6$	30.1	470
S9A(*)	500	500	$1.08 \cdot 10^8 \rightarrow$	16.8	1006
S9B(*)	500	500	$8.38 \cdot 10^6$	27.9	436
S2B	550	550	$1.25 \cdot 10^6$	30.1	412
S4C	550	550	$6.82 \cdot 10^5$	41.2	1756
S5A	550	550	$1.97 \cdot 10^7$	7.1	213
S6A	550	550	$1.08 \cdot 10^7$	23.9	506
S8D	550	550	$1.77 \cdot 10^6$	27.9	737

## A.2 Väsytyiskoetulokset laakeriteräs B:lle

Taulukko A.2: Väsytyiskoetulokset laakeriteräs B:lle.

Sauva	$\sigma_a$ (MPa)	$\sigma_m$ (MPa)	N (sykliä)	$\sqrt{a}$ ( $\mu m$ )	$d$ ( $\mu m$ )
04 B	450	450	$1.76 \cdot 10^7$	30.8	219
14 C 1	450	450	$2.01 \cdot 10^8$	29.2	626
03 Aa	475	475	$1.98 \cdot 10^7$	39.4	205
06 C	475	475	$9.05 \cdot 10^7$	29.0	298
09 D	475	475	$7.97 \cdot 10^7$	33.5	233
11 B	475	475	$4.62 \cdot 10^7$	33.1	2388
16 C 1	475	475	$1.00 \cdot 10^8$	22.3	1333
04 C	500	500	$2.27 \cdot 10^6$	54.2	52
04 D	500	500	$5.41 \cdot 10^6$	25.5	379
07 C	500	500	$2.61 \cdot 10^7$	30.9	1315
09 B	500	500	$4.97 \cdot 10^7$	11.3	1552
12 Aa	500	500	$3.54 \cdot 10^7$	5.7	470
16 A	500	500	$3.09 \cdot 10^7$	29.2	285
07 Aa	525	525	$2.11 \cdot 10^7$	8.6	851
01 B	550	550	$1.85 \cdot 10^6$	31.6	670
02 B	550	550	$4.76 \cdot 10^6$	10.2	595
03 D	550	550	$4.63 \cdot 10^6$	29.2	400
04 Aa	550	550	$4.12 \cdot 10^6$	24.4	338
05 B	550	550	$7.27 \cdot 10^6$	11.3	2277
05 D	550	550	$3.07 \cdot 10^6$	37.5	1017
06 Aa	550	550	$3.53 \cdot 10^6$	28.0	1121
13 D	550	550	$1.39 \cdot 10^6$	10.7	105
16 B	550	550	$1.07 \cdot 10^6$	23.9	377
17 B	550	550	$8.73 \cdot 10^6$	32.7	326
K	550	550	$1.85 \cdot 10^6$	50.1	3400
02 D	735	0	$1.27 \cdot 10^7$	41.9	510
03 B 1	735	0	$1.00 \cdot 10^8$	35.4	906
06 D	735	0	$3.10 \cdot 10^8$	32.4	737
08 B 1	735	0	$1.02 \cdot 10^8$	23.9	3260
10 C	735	0	$1.47 \cdot 10^7$	38.1	1200
11 D	735	0	$2.45 \cdot 10^8$	23.8	1192
12 D	735	0	$2.48 \cdot 10^8$	28.7	2661
13 C	735	0	$1.42 \cdot 10^8$	37.8	1089
14 A	735	0	$1.87 \cdot 10^7$	29.2	560
15 D	735	0	$3.48 \cdot 10^8$	28.4	692
17 A	735	0	$6.42 \cdot 10^8$	33.7	84
02 A 1	775	0	$1.24 \cdot 10^7$	32.3	2020
05 C	775	0	$1.37 \cdot 10^7$	27.9	510
12 B 1	775	0	$1.00 \cdot 10^7$	22.6	405
12 C	775	0	$9.68 \cdot 10^6$	24.4	470
15 A	775	0	$1.72 \cdot 10^7$	25.7	1730
17 D	775	0	$1.59 \cdot 10^7$	29.2	688
K4	775	0	$1.02 \cdot 10^7$	31.0	870
10 Aa	815	0	$1.10 \cdot 10^7$	34.1	894
13 A	815	0	$1.56 \cdot 10^7$	28.6	1010
14 B	815	0	$1.00 \cdot 10^7$	33.7	840
17 C	815	0	$4.06 \cdot 10^7$	6.9	400